

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

148

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/00

OL

Estimativa da densidade do espaço de fase em
colisões a altas energias usando interferometria

Victor E. Vizcarra Ruiz

Orientadora

Dra. Sandra S. Padula



23000000 3539

Junho de 2000

Agradecimientos

1. Agradecimientos al autor por su preciosa dádiva
2. Agradecimientos al autor por su perfecto don
3. Agradecimientos al autor por su gracioso apoyo
4. Agradecimientos al autor por su amigable permiso.

AL CREADOR
por su preciosa dádiva
por su perfecto don
por su gracioso apoyo
por su amigable permiso.

Agradecimentos

Aos meus pais, por sempre terem acreditado nos sonhos dos filhos.

À Ednéia, por sua constante presença.

À Sandra, sempre cordial, por sua disposição nas explicações enriquecedoras.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradecimentos

In the present work we estimate the average in the space density of points of a point process having the same mean and variance as the Poisson process, but with a different distribution function. We compare the corresponding results of stationary glass space density for the distribution functions of the Poisson process and the Poisson process. The results are compared with the corresponding results of stationary glass space density for the distribution functions of the Poisson process and the Poisson process. The results are compared with the corresponding results of stationary glass space density for the distribution functions of the Poisson process and the Poisson process.

Palavras-chave: Densidade de pontos, distribuição, modelo de Borel, processos de Poisson, processos de partição aleatória do espaço de Borel.

Keywords: Point process, distribution, Borel model, Poisson processes, random partition of Borel space.

Resumo

O presente trabalho apresenta estimativas da densidade média de espaço de fase de pions produzidos em colisões relativísticas entre íons pesados. Tal estudo leva em conta o espectro de partícula-única e a função de correlação de dois pions idênticos, segundo proposta feita por Bertsch. Sugerimos uma generalização daquela proposta introduzindo pacotes-de-onda finitos. Comparamos, então, os respectivos resultados de densidade média do espaço de fase, para duas distribuições de desacoplamento (“freeze-out”) do sistema. Uma delas parametriza tal distribuição por meio de uma gaussiana e a outra, pelo modelo “Inside-Outside Cascade” de Bjorken.

Abstract

In the present work we estimate the average phase space density of pions produced in relativistic heavy ion collisions. This study takes into account the single-particle spectrum as well as the two-identical-particle correlation function following the procedure proposed by Bertsch. We suggest to generalize it in order to include finite wave-packet spreads. Then, we compare the corresponding results of the average phase space density for two decoupling (freeze-out) distributions. One of them is parametrized by a Gaussian, and the other one, by the Inside-Outside Cascade model proposed by Bjorken.

Palavras Chaves: Colisões de íons pesados relativísticos; modelo de Bjorken, correlações de Bose-Einstein, espectro de partículas, densidade do espaço de fase.

Áreas do conhecimento: mecânica quântica; fenomenologia; física nuclear.

Índice

1	Introdução	1
2	Modelo de Bjorken	3
2.1	Modelo proposto	3
2.2	Densidade de energia na região central	5
2.3	Estrutura de platô	6
2.4	Modelo Hidrodinâmico	7
2.5	Densidade de entropia	8
3	Interferometria	11
3.1	Resenha histórica	11
3.2	Função de correlação	14
3.2.1	Distribuição de momentum de partícula única	14
3.2.2	Distribuição de momentos de duas partículas	16
3.3	Generalização da formulação de Pratt	22
4	Densidade média de espaço de fase	25
4.1	Proposta de Bertsch	25
4.2	Análise do espectro	26
4.3	$f(\vec{r}, \vec{K})$ média	27
5	Estimativa da densidade do espaço de fase	30
5.1	Reformulação da estimativa de densidade média	30
5.2	Distribuição gaussiana	33
5.2.1	Incerteza mínima	35
5.2.2	Comparação das correlações	35
5.2.3	Densidade média do espaço de fase na região central de rapidez	36
5.2.4	Análise dos espectros	38
5.2.5	Comparação das médias	39

5.3	Densidade média do espaço de fase para $y \neq 0$	40
5.3.1	Comparação das médias	41
5.4	Modelo de Kolehmainen-Gyulassy	43
5.4.1	Incerteza mínima	45
5.5	Regiões cinemáticas	46
5.6	Densidade média do espaço de fase na região central de rapidez	47
5.6.1	Momentos transversais paralelos: $\vec{K}_T \parallel \vec{q}_T : (\phi = 0)$	48
5.6.2	Análise dos espectros	49
5.6.3	$f(K_T; \Delta p, \Delta x)$ média	50
5.6.4	Momentos transversais perpendiculares: $\vec{K}_T \perp \vec{q}_T : (\phi = \pi/2)$	50
5.7	Densidade média de espaço de fase na região em que $y \neq 0$	51
6	Conclusões	63
A		67
A.1	Aditividade da rapidez	67
A.2	Densidade de energia em $y_L \leq y \leq y_R$	68
A.3	Expressão estatística de ε	69
B		71
B.1	Fontes caóticas	71
C		74
C.1	Formalismo de Pratt	74
D		76
D.0.1	Formalismo da densidade de Wigner	76
D.0.2	Modelo cascata semicássico	77
E		82
E.1	Função de correlação com base na generalização da formulação de Pratt	82
F		85
F.1	Estimativa da integral $I = \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dn}{dy} \right)$	85
F.1.1	85
F.1.2	86

Referências

Capítulo I

Introdução

Este trabalho trata da análise da evolução da legislação em matéria de direitos de propriedade intelectual, nomeadamente da lei de direitos de autor, tendo em vista a sua aplicação prática. A análise é feita sob o ponto de vista da doutrina e da jurisprudência, bem como da prática administrativa e judicial. O trabalho é dividido em duas partes: a primeira trata da evolução da legislação em matéria de direitos de autor, e a segunda trata da aplicação da lei de direitos de autor. A primeira parte é dividida em dois capítulos: o primeiro trata da evolução da legislação em matéria de direitos de autor, e o segundo trata da aplicação da lei de direitos de autor. A segunda parte é dividida em dois capítulos: o primeiro trata da aplicação da lei de direitos de autor, e o segundo trata da aplicação da lei de direitos de autor. O trabalho é dividido em duas partes: a primeira trata da evolução da legislação em matéria de direitos de autor, e a segunda trata da aplicação da lei de direitos de autor. A primeira parte é dividida em dois capítulos: o primeiro trata da evolução da legislação em matéria de direitos de autor, e o segundo trata da aplicação da lei de direitos de autor. A segunda parte é dividida em dois capítulos: o primeiro trata da aplicação da lei de direitos de autor, e o segundo trata da aplicação da lei de direitos de autor.

Capítulo 1

Introdução

As reações entre ions pesados relativísticos representam uma importante ferramenta para a compreensão da matéria nuclear densa, pois as partículas provenientes da região de reação dessas colisões podem ser utilizadas para investigar a evolução desses sistemas. No início da década de 80, inspirado no modelo Hidrodinâmico de Landau [1], Bjorken [2] propôs uma versão alternativa a este modelo para descrever a evolução de colisões a altas energias. Seu modelo, chamado “Inside-Outside Cascade” [2, 3], será discutido no Capítulo 2. Uma das possibilidades interessantes de estudo utilizando ions pesados relativísticos é sondar a extensão da região espaço-temporal da fonte emissora de partículas através da aplicação da interferometria de intensidade, proposta nos anos cinquenta por Hambury-Brown e Twiss [4]. Sua aplicação a colisões a altas energias iniciou-se em 1960 [5] quando Goldhaber e colaboradores observaram a existência de correlações angulares entre pions idênticos produzidos em colisões $p\bar{p}$, embora na época desconhecessem o trabalho de Hambury-Brown e Twiss. No Capítulo 3, faremos uma revisão de correlações entre partículas idênticas, discutindo algumas parametrizações sugeridas teoricamente, bem como aquelas comumente empregadas em análises experimentais. Desde então, muitos trabalhos foram feitos baseados nesta técnica, a qual tem sido amplamente investigada experimentalmente. Mais recentemente, Bertsch [6] sugeriu um modo de obter a densidade média do espaço de fase das partículas produzidas nas colisões nucleares a altas energias utilizando o conhecimento de função de correlação e de espectro de partícula única. Ele considerou casos compatíveis com o formalismo de Wigner no limite em que as incertezas associadas à dispersão das coordenadas das partículas produzidas, em torno de trajetórias clássicas no espaço de fase, pudessem ser desprezadas ($\Delta x \sim \Delta p \sim 0$). Bertsch propôs estimar a média da densidade do espaço de fase utilizando como função de correlação uma parametrização gaussiana, a qual não leva em consideração tais pacotes de onda e, para o espectro considerou uma parametrização exponencial, sugerida pelos dados experimentais. Sua proposta será

introduzida no Capítulo 4.

Discutiremos, então, as limitações do enfoque introduzido por Bertsch, propondo uma extensão daquela sugestão. Esta, discutida no Capítulo 5, explicita a dependência nas flutuações quânticas através de pacotes de onda ($\Delta x \Delta p \neq 0$), conforme sugerido na Ref. [7]. Inicialmente, discutiremos a representação gaussiana. Embora, por sua simplicidade, seja muito útil na caracterização dos ajustes experimentais, esta parametrização é implicitamente limitada, não descrevendo a expansão da fonte emissora de partículas. Discutiremos, então, também no Capítulo 5, uma outra maneira de parametrizar as distribuições de desacoplamento (“freeze-out”), através do modelo de Bjorken. Faremos comparações entre as funções de correlação e espectros decorrentes das parametrizações consideradas. Estudaremos, ainda, suas conseqüências sobre a densidade média do espaço de fase, estimada com base na generalização da proposta de Bertsch para pacotes de onda finitos sugerida nesta dissertação.

O Capítulo 6 será dedicado às conclusões e comentários referentes aos resultados obtidos neste trabalho.

Capítulo 2

Modelo de Bjorken

2.1 Modelo proposto

Bjorken propôs um modelo para a colisão de núcleos a altíssimas energias [2, 3], no qual, devido à contração de Lorentz agindo sobre eles, estes poderiam ser representados praticamente por dois discos, de modo a ignorar a espessura longitudinal de cada um. Assim, as coordenadas longitudinais de cada nucleon dos núcleos poderiam ser aproximadamente associadas a uma única posição, coincidindo com a do núcleo. No sistema centro de massa (SCM) poderíamos visualizar a colisão considerando que os dois núcleos se moveriam do infinito até o lugar da colisão, em $(z,t) = (0,0)$. O primeiro, B , vindo de $z = -\infty$, e o segundo, A , vindo de $z = +\infty$, ambos com velocidades próximas à da luz. Na colisão, ambos os núcleos se sobrepõem em $(z,t) = (0,0)$. Depois, os dois se afastam um do outro, depositando uma grande quantidade de energia em torno da região de colisão (ver figura 2.1). Dessa forma, Bjorken supôs que cada colisão inelástica nucleon-nucleon seria acompanhada de uma grande perda de energia e momentum, restando, porém, a cada um deles, quantidade suficiente de energia para ainda poderem se afastar da região de colisão a alta velocidade. Tal energia seria depositada em uma pequena região do espaço, em torno da região da colisão, ao redor de $z = 0$, durante um curto intervalo de tempo. A matéria criada nesta região central poderia ter densidade de energia (e conseqüentemente de entropia) muito alta, podendo atingir rapidamente o equilíbrio térmico local, em um intervalo correspondente a um tempo próprio τ_0 , estimado como sendo $\tau_0 = 1 \text{ fm}/c \simeq 3,3 \times 10^{-24} \text{ s}$. Bjorken fez, então, a hipótese de que a energia depositada poderia ser suficiente para a criação do chamado Plasma de Quarks e Gluons (QGP). Este seria um conglomerado de quarks e gluons não confinados, ocupando um volume muito maior que a dos hadrons usuais. Expandindo-se a matéria em equilíbrio térmico, sua temperatura deve cair, até que ocorra a transição de fase, de plasma para hadrons, quando for atingida a temperatura crítica T_c correspondente

a um certo tempo próprio τ_h . O sistema continua a se expandir e a temperatura continuará caindo até atingir uma temperatura na qual os hadrons se desacoplam, aparecendo assim, como partículas que os detectores poderão medir posteriormente. O tempo próprio correspondente a esta temperatura é chamado de *freeze-out*, τ_f .

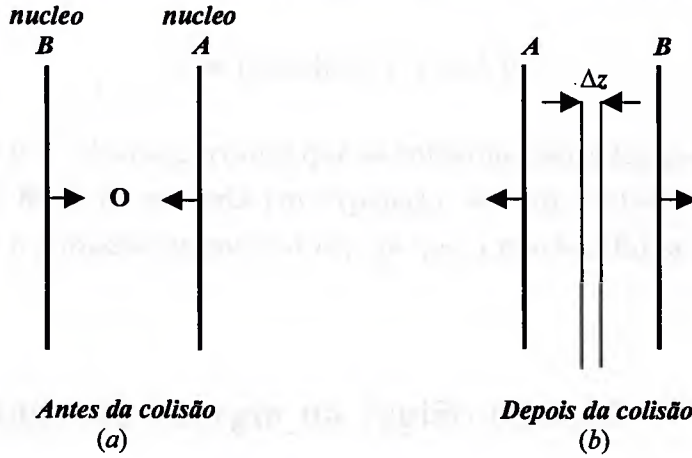


Figura 2.1: (a) Configuração de dois núcleos A e B antes da colisão frontal. (b) A configuração dos núcleos depois da colisão mostra a deposição da energia na região ao redor de $z \sim 0$.

Vejamos uma partícula em especial durante a expansão. A descrição cinemática desta partícula ao longo da direção longitudinal é mais facilmente feita através da rapidez. Esta é definida em termos da energia E e do momentum longitudinal p_z :

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (2.1)$$

Com essa definição podemos obter as coordenadas,

$$p = (m_T \cosh y, \vec{p}_T, m_T \sinh y) \quad (2.2)$$

onde $m_T = (E^2 - p_z^2)^{1/2} = (\vec{p}_T^2 + m_\pi^2)^{1/2}$. A velocidade longitudinal de partículas é, portanto

$$v_z = \frac{p_z}{E} = \tanh y.$$

Bjorken propôs uma outra versão de Modelo Hidrodinâmico, alternativa [1] á de Landau, com diferentes condições iniciais. Definiu também a chamada rapidez espaço temporal, η , através das coordenadas t e z . Para uma partícula que parta da origem ($t = 0, z = 0$), podemos escrever ainda

$$\frac{z}{t} = v_z = \tanh y = \tanh \eta,$$

ou

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right). \quad (2.3)$$

Desse modo, as coordenadas espaço-temporais podem ser escritas na forma

$$x = (\tau \cosh y, \vec{r}_T, \tau \sinh y) \quad (2.4)$$

onde $\tau = (t^2 - z^2)^{1/2}$. Vemos portanto que as variáveis, naturais que poderiam muito bem descrever o fluxo da matéria em expansão, seriam portanto, a rapidez y e o tempo próprio τ e a massa transversal m_T , já que a matéria flui a partir o ponto da colisão.

2.2 Densidade de energia na região central

Vejamos a densidade de energia de um elemento de fluido criado na região central, e vamos defini-lo em um referencial em relação ao qual ele se encontra em repouso. Esse referencial corresponderia ao sistema de centro de massa da colisão, no qual $z = 0$ quando $y = 0$, pois segundo a expressão (2.4), a relação $z = \tau \sinh y$ indica que para um dado tempo próprio τ , um valor muito pequeno de rapidez estará associado a um valor muito pequeno de z . Isto significa que a região central de rapidez estará associado à região central espacial, ao redor de $z \sim 0$, onde aconteceram as colisões nucleon-nucleon.

Consideremos uma espessura longitudinal de comprimento Δz em torno de $z = 0$. Seja \mathcal{A} a área transversa dos núcleos que colidem (ver figura 2.2).

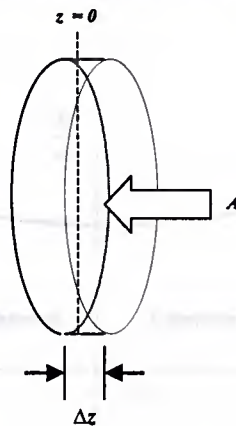


Figura 2.2: Volume cilíndrico de um elemento de fluido na região central, ao redor de $z \sim 0$, com espessura Δz e área \mathcal{A} .

Vemos que o volume formado será $V = \Delta z \mathcal{A}$. Em $(z, \tau) = (0, \tau_0)$ a densidade de número de partículas pode, então, ser escrita como

$$\rho = \frac{\Delta N}{\Delta z \mathcal{A}} = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{dN}{dy} \frac{dy}{dz} \Big|_{y=0}$$

Utilizando a Eq.(2.2), correspondente a $\tau = \tau_0$, vemos que $z_{\tau=\tau_0} = \tau_0 \sinh y$; portanto,

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{A}} \left\{ \frac{dN}{dy} \frac{1}{\tau_0 \cosh y} \right\} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\tau_0 \mathcal{A}} \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0}$$

Por outro lado, a energia de uma partícula com rapidez y , componente temporal do 4-momentum p^μ , pode ser escrito como $E = p^0 = m_T \cosh y$. Assim sendo, a expressão que relaciona a densidade de energia com a distribuição da rapidez pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_0 = \rho m_T \cosh y \Big|_{y=0} = \frac{m_T}{\tau_0 \mathcal{A}} \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \quad (2.5)$$

O valor de τ_0 , como já dissemos, foi considerado por Bjorken como sendo

$$\tau_0 = 1\text{fm}/c \simeq \frac{10^{-13}\text{cm}}{3 \times 10^{10}\text{cm/s}} = 3,3 \times 10^{-24}\text{s}$$

2.3 Estrutura de platô

Na ref. [2], Bjorken desenvolveu seu trabalho assumindo a formação de uma *estrutura de platô* na região central de rapidez, em colisões núcleo-núcleo a altíssimas energias (ver figura 2.3).

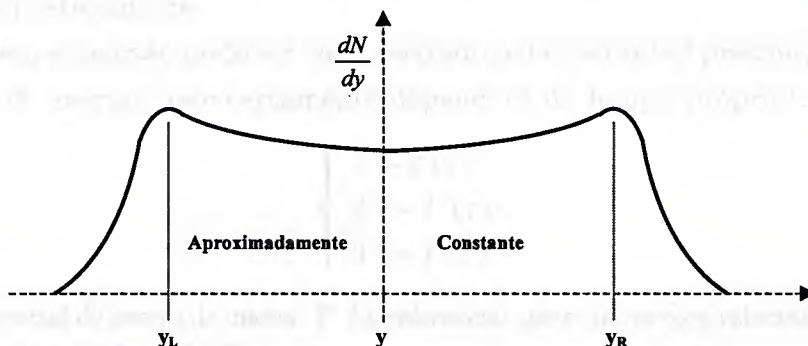


Figura 2.3: Estrutura de platô na distribuição de rapidez sugerida pelos dados experimentais das referências [12, 13], para colisões $p\bar{p}$ a energias do SPS.

Essa hipótese, sugerida por dados experimentais [12, 13], implica que a densidade de rapidez seria aproximadamente constante em faixa considerável de y , isto é, $y_L \lesssim y \lesssim y_R$ na Fig. 2.3. Isso significa que a distribuição de rapidez para qualquer valor de y , dentro da faixa acima, será aproximadamente a mesma que para $y = 0$, ou seja,

$$\left. \frac{dN}{dy} \right|_{\left\{ \begin{array}{c} v_v \\ v_L \leq v \leq v_R \end{array} \right\}} = \left. \frac{dN}{dy} \right|_{y=0} \quad (2.6)$$

A consequência disto é que em $y_L \lesssim y \lesssim y_R$ encontramos uma distribuição de rapidez invariante de Lorentz para “boosts” ao longo da direção longitudinal, já que a rapidez é aditiva (ver apêndice A). A densidade de energia, por exemplo, será a mesma em ambos referenciais* F' e F (Ver apêndice A):

$$\varepsilon'_0(F') = \varepsilon_0(F). \quad (2.7)$$

Temos que notar também que a faixa $y_L \lesssim y \lesssim y_R$ cresce quando a energia de colisão aumenta. Nesse intervalo praticamente não há dependência na rapidez (a distribuição fica aproximadamente constante).

2.4 Modelo Hidrodinâmico

Landau[1] propôs estudar os processos a altas energias através do Modelo Hidrodinâmico. Considerou como justificativa para utilizar o tratamento hidrodinâmico do sistema que o caminho livre médio das partículas produzidas após a colisão fosse muito menor do que as dimensões do sistema [1], permanecendo assim, muito pequeno, durante boa parte da expansão. A matéria produzida seria considerada como um fluido ideal, sem viscosidade, que não conduz calor e não tem massa. Como as velocidades envolvidas são muito próximas à da luz, a hidrodinâmica deverá ser tratada relativisticamente.

O fluido em expansão pode ser caracterizado pelas variáveis pressão, temperatura e densidade de energia, que certamente dependerá do tempo próprio[†]:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon(\tau) \\ P = P(\tau) \\ T = T(\tau) \end{cases} \quad (2.8)$$

* F é o referencial de centro de massa. F' é o referencial que se move com velocidade β na direção positiva do eixo z no referencial F .

[†]As variáveis pressão, temperatura e densidade de energia dependem tanto da rapidez como do tempo próprio, mas a estrutura de platô central nos permite considerar independência na variável de rapidez.

O modelo hidrodinâmico de Landau [1] permite descrever a evolução do sistema. O tensor de energia-momentum

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P \quad (2.9)$$

deve ser conservado, isto é,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.10)$$

A solução desta equação pode ser encontrada contraindo-o com u_ν e utilizando as definições $\tau = \sqrt{(x^0)^2 - z^2}$, $u_\nu u^\nu = 1$ e $u^\mu = x^\mu / \tau$, teremos

$$\partial_\tau \varepsilon + \frac{(\varepsilon + P)}{\tau} = 0 \quad (2.11)$$

Para que esta equação diferencial possa ser resolvida necessitamos de uma determinada equação de estado. Considerando que o fluido tenha o comportamento semelhante ao de um gás ideal e que a velocidade do som seja $c_0^2 = 1/3$, então $P = c_0^2 \varepsilon = \varepsilon/3$. Logo,

$$\frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} \quad (2.12)$$

onde $\varepsilon(\tau) \equiv \varepsilon_\tau$ e $\varepsilon(\tau_0) \equiv \varepsilon_0$. Dessa forma, obtemos para a pressão

$$\frac{P_\tau}{P_0} = \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} \quad (2.13)$$

No apêndice (A.3) é deduzida a expressão para a densidade de energia, via método estatístico, relacionada diretamente com a temperatura,

$$\varepsilon = c_{total} \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (2.14)$$

onde

$$c_{total} = c_g + \frac{7}{8}(c_q + c_{\bar{q}})$$

Através de (2.12) e (2.14) encontramos a relação entre temperatura e tempo próprio:

$$\frac{T_\tau}{T_0} = \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} \quad (2.15)$$

2.5 Densidade de entropia

Uma outra variável que caracteriza o fluido em expansão é a densidade de entropia. A variação da energia está relacionada com as variações de volume e de entropia pela relação termodinâmica [14]:

$$dE = -PdV + TdS$$

Com esta expressão obtemos o valor da densidade de entropia em termos de ε , P e T :

$$s = \frac{\varepsilon + P}{T} \quad (2.16)$$

Utilizando os resultados das variáveis dependentes do tempo da seção precedente, teremos

$$\frac{s_\tau}{s_0} = \frac{\varepsilon_\tau + P_\tau T_0}{\varepsilon_0 + P_0 T_\tau} = \frac{\tau_0}{\tau} \quad (2.17)$$

o que mostra que a densidade de entropia é inversamente proporcional ao tempo próprio [2].

A importância do resultado acima é sua consequência sobre a própria entropia pois, sendo ela definida como dS/dV , pode ser escrita como

$$\frac{dS}{dV} = \frac{dS}{d^2r_T \tau dy}$$

sendo d^2r_T o elemento transversal da região central de rapidez, e $dz = \tau dy$ o elemento longitudinal, segundo (2.2). Como o produto $s_\tau \tau$ é uma constante, temos

$$\frac{dS}{d^2r_T dy} = s\tau = \text{constante}$$

a variação no tempo próprio conduzirá a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dS}{d^2r_T dy} \right) = 0.$$

Porém, como estamos supondo que não haja expansão transversal,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dS}{dy} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Isto significa que o movimento hidrodinâmico do fluido é caracterizado por uma entropia constante no tempo e por unidade de rapidez [2].

O resultado (2.18) acima, permite estimar diretamente a multiplicidade, isto é, o número total de partículas produzidas na colisão, a qual está diretamente ligada à entropia. Se a entropia é conservada durante a expansão hidrodinâmica, como é mostrado no resultado (2.18), então a multiplicidade final de partículas produzidas, por unidade de rapidez, deve ser proporcional à densidade de entropia. Isto, por sua vez, está relacionado às condições iniciais da reação - como foi feito com a densidade

de energia na seção 2.2 -. Considerando que a variação de entropia por unidade de rapidez de uma colisão núcleo-núcleo seja proporcional à correspondente colisão nucleon-nucleon,

$$\left[\frac{dS}{dy} \right]_{\text{núcleo-núcleo}} = \frac{1}{d_0^2} \pi (1.2A^{1/3})^2 \left[\frac{dS}{dy} \right]_{\text{nucleon-nucleon}},$$

onde $1/d_0^2$ representa o número efetivo de colisões nucleon-nucleon independentes por unidade de área e A é a massa atômica dos núcleos (supondo idênticos). Por outro lado, dada a conservação de entropia e a hipótese de que a multiplicidade de partículas produzidas seja proporcional à entropia, encontramos que a taxa de produção de pions da reação núcleo-núcleo em relação à reação nucleon-nucleon é aproximadamente igual ao número de nucleons:

$$\frac{(dN_\pi/dy)_{A-A}}{(dN_\pi/dy)_{NN}} \sim \left[\frac{2}{d_0} \right]^2 A^{2/3} \quad (2.19)$$

onde $A - A$ corresponde à reação núcleo-núcleo, e NN à reação nucleon-nucleon. Segundo Bjorken, uma vez determinada experimentalmente a multiplicidade de partículas de uma dada reação, através da Eq.(2.19) poderíamos estimar d_0 e, assim, inferir informação sobre as condições iniciais do fluido.

Capítulo 3

Interferometria

3.1 Resenha histórica

A tecnologia do radar possibilitou a descoberta de estrelas através da radioastronomia. Através da interferometria de Michaelson, técnica padrão no início da radioastronomia, foi possível medir as dimensões de estrelas. Esta técnica compara as *amplitudes* da luz que chegam a dois pontos separados: com o auxílio uma lente fazemos convergir os dois sinais para logo depois produzir um modelo de difração em função da separação dos pontos. Da estrutura do modelo de difração é possível determinar o tamanho angular da fonte. Usando esta técnica, Michaelson mediu o diâmetro angular do sistema de Júpiter em 1891. Em 1895 K. Schwarzschild mediu, pela primeira vez, o diâmetro angular de estrelas binárias. O problema desta técnica é que o tamanho das separações sob a qual se comparam as amplitudes limita a resolução, para um dado comprimento de onda. As fontes em radioastronomia teriam um tamanho angular grande, e seria necessário que a separação entre os dois detectores fosse muito pequena. Ao contrário, as fontes pequenas poderiam precisar de uma separação bem maior entre os telescópios, os quais talvez tivessem que ser colocados em continentes diferentes, por exemplo, para conseguir correlacionar as amplitudes. Este problema foi resolvido pelo radioastrônomo Robert Hanbury Brown em 1949. Sua idéia era que “se a radiação recebida em dois lugares diferentes fosse mutuamente coerente, então as flutuações na *intensidade* dos sinais recebidos nestes dois lugares estariam correlacionados.” [4]Richard Twiss teve importante participação na análise matemática das correlações de intensidade.

O primeiro teste da interferometria de intensidade foi em 1950, quando Hanbury Brown e R. Twiss (HBT) mediram o diâmetro do Sol usando dois radiotelescópios operando para comprimento de onda de 2.4m (na banda de FM). O próximo passo foi medir os diâmetros angulares de estrelas Cas A e Cyg A.

Mesmo substituindo a técnica de Michaelson pela de HBT, as duas estão rela-

cionados intimamente, como foi notado na Ref. [4]*. Para entender a proposta de Hanbury-Brown e Twiss, consideremos dois pontos diferentes de uma mesma fonte, x_a e x_b , e que emitindo cada um ondas planas de mesma frequência, como mostra a figura 3.1. No espaço, as fontes estão separadas pela distância R . A amplitude de

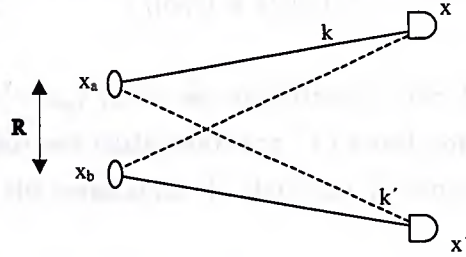


Figura 3.1: Esquema de produção e detecção de ondas eletromagnéticas.

onda no detector x , calibrado para detectar partículas com momento k (considerando as unidades naturais $\hbar = c = 1$), será

$$A_x \sim \alpha e^{ik(x-x_a)+i\phi_a} + \beta e^{ik(x-x_b)+i\phi_b} \quad (3.1)$$

onde ϕ_a e ϕ_b são fases aleatórias (as polarizações serão ignoradas), e sua intensidade total corresponde a

$$\begin{aligned} I_x &= |A_x|^2 \\ &\sim |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha^* \beta e^{-i[k(x_b-x_a)-\phi_b+\phi_a]} \\ &\quad + \alpha \beta^* e^{i[(k(x_b-x_a)-\phi_b+\phi_a)]}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Resultado similar será medido pelo detector colocado no ponto y .

Fazendo uma média sobre as fases aleatórias, os termos exponenciais tendem a zero. Assim sendo, as intensidades médias nos dois detectores será dada por

$$\langle I_x \rangle = \langle I_y \rangle \sim (\langle |\alpha|^2 \rangle + \langle |\beta|^2 \rangle). \quad (3.3)$$

Disto vemos que o produto das médias das intensidades $\langle I_x \rangle \langle I_y \rangle$ independe da separação dos detectores.

Por outro lado, fazendo a média sobre as fases no produto das intensidades $I_x I_y$, apenas os termos independentes de ϕ_a e ϕ_b sobreviverão, já que tais fatores introduzem rapidamente oscilações nos termos a eles proporcionais; desse modo, a média do produto $I_x I_y$ será

$$\langle I_x I_y \rangle \sim (\langle |\alpha|^2 \rangle + \langle |\beta|^2 \rangle)^2 + 2 \langle |\alpha|^2 |\beta|^2 \rangle \cos((k - k') \cdot (x_b - x_a)).$$

*Independente da relação entre as duas interferometrias, só analizaremos o efeito HBT sem nenhuma comparação com a técnica de Michaelson.

$$\sim \langle I_x \rangle \langle I_y \rangle + 2 \langle |\alpha|^2 |\beta|^2 \rangle \cos((k - k') \cdot (x_b - x_a)) \quad (3.4)$$

Então

$$C(q) = \frac{\langle I_x I_y \rangle}{\langle I_x \rangle \langle I_y \rangle} = 1 + 2 \frac{\langle |\alpha|^2 \rangle \langle |\beta|^2 \rangle}{(\langle |\alpha|^2 \rangle + \langle |\beta|^2 \rangle)^2} \cos((k - k') \cdot (x_b - x_a)) \quad (3.5)$$

O produto $(k - k') \cdot (x_b - x_a)$ pode ser substituído por $R \cdot q$, sendo $q = k - k'$, e k e k' o momento medido em cada detector. O sinal correlacionado na Eq. (3.5) varia como uma função da separação do detector d com uma escala característica de comprimento

$$d = \lambda / \theta, \quad (3.6)$$

onde λ é o comprimento de onda da luz, e $\theta = R/L$ é o tamanho angular, visto a partir dos detectores. Assim, variando a separação dos detectores obtemos informação sobre o ângulo aparente das duas fontes e, com um conhecimento dos momentos individuais, sobre o tamanho da fonte.

Se no lugar de duas fontes discretas tivermos uma distribuição, $\rho(\vec{r})$, então, fazendo a média sobre a distribuição de fonte, encontraremos que a função de correlação relaciona-se com sua transformada de Fourier:

$$C(q) \sim 1 + \left| \int d^3r \rho(r) e^{iq \cdot R} \right|^2. \quad (3.7)$$

Hambury-Brown e Twiss demonstraram, tanto teórica como experimentalmente, que a interferometria de intensidade funcionava muito bem para radioastronomia. Faltava saber se o efeito seria também observado para o espectro electromagnético visível. HBT decidiram testar a idéia usando um feixe proveniente de uma lâmpada de vapor de mercúrio - uma fonte térmica - e um espelho semi-prateado para separar o feixe em dois [4]. Com esta experiência, eles conseguiram controlar o tempo τ entre uma detecção e outra simplesmente variando o comprimento da trajetória relativa entre o espelho e os detectores. O que encontraram foi que, para τ grande, as correlações das intensidades desapareciam, e que as correlações cresciam com a diminuição de τ . O tempo de escala característico é chamado de *tempo de coerência* do feixe que, neste caso, é essencialmente \hbar/T , onde T é a temperatura da fonte. Este experimento foi uma demonstração da existências de “conglomerado de ftons,” i.e., ftons de um feixe térmico que aparentemente não apresentam correlações tendem a ser detectados em pares próximos. Estes resultados não foram inicialmente bem aceitos, mas Purcell [15] mostrou que o efeito podia ser entendido em termos de flutuações do campo eletromagnético.

Com a demonstração de que a interferometria de intensidade podia ser empregada também para a luz visível, Hanbury-Brown e Twiss aplicaram a técnica para medir o tamanho angular da estrela Sirius (α Canus Majoris A), estudando as correlações das intensidades ópticas entre dois telescópios [4].

A técnica foi generalizada para outros bosons, e também para fermions. As aplicações do método HBT estendem-se à física subatômica, com o intuito de investigar a evolução espaço-temporal das colisões nucleares e entre partículas elementares. A fonte emissora, neste caso, é a região que representa o estágio final da reação, quando o sistema se desacopla. Em astronomia, as características espaciais da fonte emissora de partículas praticamente independem da escala de tempo de medida. Em outras palavras, o tamanho da estrela em estudo não muda substancialmente durante o processo de medida. Já nas colisões de partículas subatômicas a altas energias o sistema evolui com o tempo, pois normalmente se expande antes de se desacoplar. Outra diferença entre esses casos é que em radioastronomia a interferência ocorre próxima aos detetores (no caso, dos telescópios), enquanto que na produção de partículas a interferência ocorre próxima da fonte [16].

O início da interferometria aplicada às colisões de partículas data de 1960, quando G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Y. Lee, e A. Pais [5] descobriram a existência de correlações angulares entre pions produzidos em colisões $p\bar{p}$, sem que tivessem conhecimento prévio do método HBT.

3.2 Função de correlação

A função de correlação nos permite sondar a extensão da região do espaço-tempo de uma fonte emissora de pions, por exemplo, que foram criados em colisões nucleares relativísticas. Primeiramente faremos uma breve descrição da distribuição inclusiva de partícula única e depois, da distribuição simultânea de duas partículas [3].

3.2.1 Distribuição de momentum de partícula única

Consideremos que um pion de 4-momentum $k = (k^0, \vec{k})$, seja emitido por uma fonte no ponto $x = (t, \vec{x})$ e detectado no ponto $y = (t', \vec{y})$. A amplitude de probabilidade para a observação deste pion pode ser escrita em termos de integrais de trajetórias de Feynman como:

$$\psi(x \rightarrow y) = \sum_{\substack{\text{todas as} \\ \text{trajetórias}}} e^{iS(\text{trajetória})} \quad (3.8)$$

onde $\sum e^{iS(\text{trajetória})}$ é a soma do fator de fase sobre as trajetórias, e S é a ação da partícula. Vamos assumir que, na propagação da partícula em questão, não haja absorção ou atenuação, de modo que a magnitude da amplitude de probabilidade seja unitária. Tanto no caso relativístico como no não-relativístico, o valor dominante da ação aproxima-se àquele correspondente à trajetória clássica. Isto porque, já que a trajetória entre o ponto de emissão e o ponto de detecção pode ser qualquer, há grande flutuação em torno da trajetória clássica, a tendência então, é de se cancelarem quando fazemos a soma sobre tais flutuações, de forma que a contribuição dominante será a da trajetória clássica. Portanto,

$$S(\text{trajetória clássica}) \approx k \cdot (x - y) \quad (3.9)$$

A amplitude toma a forma

$$\psi(x \rightarrow y) \cong e^{ik \cdot (x-y)} \quad (3.10)$$

Para que a amplitude fique completamente caracterizada, precisamos descrever o estado do pion no momento de sua produção no ponto x através de uma amplitude de probabilidade de produção. Esta amplitude é caracterizada por uma magnitude $A(k, x)$ real e positiva, e uma fase de produção $\phi(x)$. Então, (3.10) transforma-se em

$$\psi(x \rightarrow y) = A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot (x-y)} \quad (3.11)$$

Agora, se a fonte for extensa, o pion poderia ser produzido em qualquer outro ponto da fonte; nesse caso teremos

$$\Psi \left(\left\{ \begin{array}{l} \text{todos os} \\ \text{pontos } x \end{array} \right\} \rightarrow y \right) = \sum_x A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot (x-y)}, \quad (3.12)$$

que é a amplitude de probabilidade completa para que um único pion de momentum k seja produzido no ponto x da fonte, se propague ao longo de uma trajetória clássica e seja detectado em y .

A probabilidade para que o pion com momentum k , produzido em x , viaje e seja detectado em y , é exatamente o quadrado da amplitude de probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(k) &= \left| \Psi \left(\left\{ \begin{array}{l} \text{todos os} \\ \text{pontos } x \end{array} \right\} \rightarrow y \right) \right|^2 = \left| \sum_x A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot (x-y)} \right|^2 \\ &= \left| \left(\sum_x A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot x} \right) e^{-ik \cdot y} \right|^2 = \left| \sum_x A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot x} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta quantidade caracteriza o espectro ou distribuição de momentum de partícula-única.

Se a fonte for coerente, a fase $\phi(x)$ será uma função bem comportada, associada à coordenada x do ponto fonte. Dessa forma, a probabilidade (3.13) pode ser escrita como

$$P(k) = \left| \int dx \rho(x) A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot (x-x')} \right|^2 = \left| \int dx \rho(x) A(k, x) e^{i\phi(x)} e^{ik \cdot x} \right|^2 \quad (3.14)$$

Se a fonte for caótica, a fase $\phi(x)$ não mais terá a característica de ser uma função bem comportada associada à coordenada x do ponto fonte, mas de ser uma função aleatória desta variável. Assim, separando na Eq. (3.13) os termos que dependem da função $\phi(x)$ daqueles que independem da mesma, teremos

$$P(k) = \sum_x A^2(k, x) + \sum_{x \neq y} A(k, x) A(k, y) e^{i\phi(x)} e^{-i\phi(y)} e^{ik \cdot (x-y)}$$

Com isto, encontraremos que a somatória dependente de $\phi(x)$ não dá contribuição, pois contém um grande número de termos com magnitudes que variam lentamente com o tempo, em contraste com as fases aleatórias que apresentam flutuações temporais muito rápidas. A anulação desta contribuição está mostrada no apêndice B.1. Desse modo, a intensidade de probabilidade será reduzida a

$$P(k) = \sum_x A^2(k, x) \quad (3.15)$$

Agora, se as fontes pontuais forem distribuídas continuamente, podemos considerar o limite

$$\sum_x \longrightarrow \int dx \rho(x), \quad (3.16)$$

onde $\rho(x)$ é a densidade de pontos de fonte por unidade de volume espaço-temporal ao redor do ponto x . Finalmente obtemos

$$P(k) = \int dx \rho(x) A^2(k, x). \quad (3.17)$$

3.2.2 Distribuição de momentos de duas partículas

Consideremos que dois pions sejam produzidos nos pontos de fonte com coordenadas $x_1 = (t_1, \vec{x}_1)$ e $x_2 = (t_2, \vec{x}_2)$, sendo observados posteriormente em detectores diferentes, situados nos pontos x'_1 e x'_2 ; k_1 e k_2 são os momentos destas partículas

medidos nos detectores. A amplitude de probabilidade para a detecção conjunta destes dois pions contém o produto das probabilidades individuais;

$$\psi(x_1 \rightarrow x'_1) \psi(x_2 \rightarrow x'_2). \quad (3.18)$$

Considerando o fato de os pions observados nos detectores serem indistinguíveis, devemos considerar também a amplitude

$$\psi(x_1 \rightarrow x'_2) \psi(x_2 \rightarrow x'_1), \quad (3.19)$$

de modo a explicitar a simetria por troca de partículas. Assim, a amplitude total será

$$\begin{aligned} \Psi(x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(x_1 \rightarrow x'_1) \psi(x_2 \rightarrow x'_2) + \\ + \psi(x_1 \rightarrow x'_2) \psi(x_2 \rightarrow x'_1)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $1/\sqrt{2}$ é o fator de normalização.

Seguindo o mesmo procedimento adotado no caso de um único pion, encontraremos que a forma da amplitude de cada pion detectado deverá conter um fator que descreva a amplitude de produção e outro que especifique a fase de emissão, ou seja,

$$\psi(x_i \rightarrow x'_j) = A(k_j, x_i) e^{i\phi_i(x)} e^{ik_j \cdot (x_i - x'_j)} \quad (3.21)$$

Agora, considerando a possibilidade de que o par de pontos de fontes possa ser qualquer, dentro da fonte extensa, a amplitude total será dada pela soma sobre todos os pares de pontos de fonte

$$\Psi \left(\left\{ \begin{array}{l} \text{todos os} \\ \text{pontos } x_1 x_2 \end{array} \right\} \rightarrow x'_1 x'_2 \right) = \sum_{x_1, x_2} e^{i\phi(x_2)} e^{i\phi(x_1)} \Phi(x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2) \quad (3.22)$$

onde a função $\Phi(x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2)$ é a parte que independe de ϕ

$$\begin{aligned} \Phi(x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ A(k_1, x_1) A(k_2, x_2) e^{ik_1 \cdot (x_1 - x'_1)} e^{ik_2 \cdot (x_2 - x'_2)} \right. \\ \left. + A(k_1, x_2) A(k_2, x_1) e^{ik_1 \cdot (x_2 - x'_1)} e^{ik_2 \cdot (x_1 - x'_2)} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por outro lado a probabilidade para a detecção conjunta de dois pions é definida como:

$$P(k_1, k_2) = \frac{1}{2!} \left| \Psi \left(\left\{ \begin{array}{l} \text{todos os} \\ \text{pontos } x_1 x_2 \end{array} \right\} \rightarrow x'_1 x'_2 \right) \right|^2. \quad (3.24)$$

Esta distribuição representa a probabilidade de que os dois pions que foram emitidos em x_1 e x_2 , com momentos k_1 e k_2 , possam ser detectados em x'_1 e x'_2 . Desenvolvendo esta expressão em termos das equações (3.22) e (3.23), teremos

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \Psi^* \Psi \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x_1, x_2, y_1, y_2 \\ \{x_1, x_2\} \neq \{y_1, y_2\}}} \left\{ e^{i\phi(x_1) + i\phi(x_2) - i\phi(y_1) - i\phi(y_2)} \Phi^* (y_1 y_2 \rightarrow x'_1 x'_2) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \Phi (x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2) \right\}
 \end{aligned}$$

No caso das fontes coerentes, a probabilidade de detectar conjuntamente dois pions, pode ser escrita como

$$P(k_1, k_2) = \frac{1}{2!} \left| \sum_{x_1, x_2} e^{i\phi(x_2)} e^{i\phi(x_1)} \Phi (x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2) \right|^2 \quad (3.25)$$

Devido a $\phi(x)$ ser uma função bem comportada da coordenada espaço-temporal, não podemos separar termos dependentes de fases aleatórias dos termos independentes da mesma, tal como no caso de fontes caóticas. Nesse caso, utilizando a expressão (3.23) na Eq.(3.25), encontraremos que

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2) &= \frac{1}{2!} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x_1} A(k_1, x_1) e^{i\phi(x_1)} e^{ik_1 \cdot (x_1 - x'_1)} \sum_{x_2} A(k_2, x_2) e^{i\phi(x_2)} e^{ik_2 \cdot (x_2 - x'_2)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x_2} A(k_1, x_2) e^{i\phi(x_2)} e^{ik_1 \cdot (x_2 - x'_1)} \sum_{x_1} A(k_2, x_1) e^{i\phi(x_1)} e^{ik_2 \cdot (x_1 - x'_2)} \right|^2
 \end{aligned}$$

que pode se simplificado como

$$P(k_1, k_2) = \left| \sum_{x_1} e^{i\phi(x_1)} A(k_1, x_1) e^{ik_1 \cdot (x_1 - x'_1)} \sum_{x_2} e^{i\phi(x_2)} A(k_2, x_2) e^{ik_2 \cdot (x_2 - x'_2)} \right|^2 \quad (3.26)$$

Considerando a distribuição de probabilidade de observação destas partículas em separado, dada na Eq. (3.14), encontramos que

$$P(k_1, k_2) = P(k_1)P(k_2) \quad (3.27)$$

Assim,

$$C(k_1, k_2) = 1, \quad (3.28)$$

o que mostra que, para fontes coerentes, a função de correlação adquire um valor constante, independentemente dos momentos das partículas.

Durante o desenvolvimento deste trabalho vamos nos ater a casos em que o sistema seja uma fonte caótica.

Novamente, como discutido no caso de um único pion para fontes caóticas, a contribuição de um grande número de termos com magnitudes similares e fases aleatórias rapidamente oscilantes se cancelam, resultando em

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} \sum_{x_1, x_2} |\Phi(x_1 x_2 \rightarrow x'_1 x'_2)|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x_1, x_2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ A(k_1, x_1) A(k_2, x_2) e^{ik_1 \cdot (x_1 - x'_1)} e^{ik_2 \cdot (x_2 - x'_2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + A(k_1, x_2) A(k_2, x_1) e^{ik_1 \cdot (x_2 - x'_1)} e^{ik_2 \cdot (x_1 - x'_2)} \right\} \right|^2 \\
 &= \sum_{x_1, x_2} \left[A^2(k_1, x_1) A^2(k_2, x_2) + \right. \\
 &\quad \left. + A(k_1, x_1) A(k_2, x_1) e^{i(k_2 - k_1) \cdot x_1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times A(k_2, x_2) A(k_1, x_2) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x_2} \right] \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

No limite de uma distribuição contínua de pontos de fontes pontuais, teremos

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2) &= \int dx_1 \rho(x_1) \int dx_2 \rho(x_2) \left[A^2(k_1, x_1) A^2(k_2, x_2) + \right. \\
 &\quad \left. + A(k_1, x_1) A(k_2, x_1) e^{i(k_2 - k_1) \cdot x_1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times A(k_2, x_2) A(k_1, x_2) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x_2} \right] \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Comparando, então, com o resultado obtido na Eq.(3.17), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2) &= P(k_1) P(k_2) + \\
 &\quad + \left| \int dx \rho(x) A(k_1, x) A(k_2, x) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \right|^2. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Desse modo, definimos como *função de correlação* a razão entre a probabilidade de observar os pions conjuntamente em relação à probabilidade de observar os mesmos pions em separado, isto é[†],

$$C(k_1, k_2) = \frac{P(k_1, k_2)}{P(k_1) P(k_2)} = 1 + \frac{|\int d^4x \rho(x) A(k_1, x) A(k_2, x) e^{iq \cdot x}|^2}{\int d^4x_1 \rho(x_1) A^2(k, x_1) \int d^4x_2 \rho(x_2) A^2(k, x_2)} \quad (3.32)$$

[†]De uma forma geral, a função de correlação deveria ser escrito como

$$C(k_1, k_2) = 1 \pm \frac{|\int d^4x \rho(x) A(k_1, x) A(k_2, x) e^{iq \cdot x}|^2}{\int d^4x_1 \rho(x_1) A^2(k, x_1) \int d^4x_2 \rho(x_2) A^2(k, x_2)},$$

com a introdução dos sinais positivo e negativo, correspondendo o sinal negativo ao caso fermiônico.

onde $q = k_1 - k_2$ é diferença de momento ou “*momentum relativo*” do par de pions. Se a função de correlação não sofre influência das amplitudes de produção, a Eq.(3.32) poderá reescrever-se como

$$C(q) = 1 + \frac{|\int d^4x \rho(x)e^{iq \cdot x}|^2}{\int d^4x_1 \rho(x_1) \int d^4x_2 \rho(x_2)} \quad (3.33)$$

O modelo da Eq.(3.33) corresponde ao caso em que o espaço de fase é desacoplado, isto é, $g(x, p) = \rho(x)h(p)$. Isto é muito útil para se tratar fontes estáticas, uma vez que a distribuição de momentos das partículas produzidas é dinamicamente independente das localizações das fontes pontuais, porém, esta formulação é simplesmente limitada, uma vez que exclui casos em que $g(x, p) \neq \rho(x)h(p)$ (como fontes em expansão, por exemplo).

Uma abordagem mais geral, derivada com base no formalismo de densidade de Wigner foi proposta por Pratt [17][†]. Nela, o espaço de fase poderia não estar desacoplado. A função de correlação seria escrita, então, na forma

$$C(q, \vec{K}) = 1 + \frac{|\int d^4x g(x, \vec{K})e^{iq^\mu x_\mu}|^2}{\int d^4x_1 g(x_1, \vec{k}_1) \int d^4x_2 g(x_2, \vec{k}_2)}, \quad (3.34)$$

cujos desenvolvimentos estão dados no Apêndice C.1. Na expressão (3.34), $g(x, \vec{K})$ é a função de Wigner, análogo quanto-mecânico das distribuições no espaço de fase clássicos. As funções de Wigner, quando interligadas em x ou K , levam às distribuições observáveis de partículas no espaço dos momentos ou das coordenadas, respectivamente. A função $g(x, \vec{K})$ é também interpretada como a função de emissão da fonte, caracterizando, assim, a fonte emissora de partículas criadas em colisões entre ions pesados relativísticos.

A formulação original de Pratt não era, porém, covariante. Mais recentemente [7, 18] foram propostos generalizações covariantes desta, tal que os 3-momentos \vec{K} passem a 4-momentos, ou seja,

$$C(q, K) = 1 + \frac{|\int d^4x g(x, K)e^{iq \cdot x}|^2}{\int d^4x_1 g(x_1, k_1) \int d^4x_2 g(x_2, k_2)}, \quad (3.35)$$

sendo que k_1^μ, k_2^μ são os momentos das partículas observadas nos detectores. A partir deles, definimos os quadrivetores $q^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu$ e $K = (k_1^\mu + k_2^\mu)/2$, os quais normalmente se encontram fora da camada de massa. Em decorrência, vemos que

$$k_1^\mu = K^\mu + \frac{q^\mu}{2} \quad ; \quad k_2^\mu = K^\mu - \frac{q^\mu}{2}. \quad (3.36)$$

[†]Antes disso, Shuryak havia proposto [19] uma formulação equivalente, sem mencionar as funções de Wigner.

A partir da Eq.(3.36) é imediato verificar que

$$q \cdot K = q^\mu K_\mu = q^0 K^0 - \vec{q} \cdot \vec{K} \equiv 0. \quad (3.37)$$

A extensão covariante desse formalismo pressupõe que a componente temporal do quadrimomento relativo q^μ verifique a Eq.(3.37) acima, dentro da chamada aproximação de camada-de-massa (“on-shell approximation”),

$$K^0 \approx E_K = \sqrt{\vec{K}^2 + m^2}. \quad (3.38)$$

Então, substituindo (3.38) em (3.37), vemos que, na extensão covariante,

$$q^0 = \frac{\vec{q} \cdot \vec{K}}{K^0} \approx \frac{\vec{q} \cdot \vec{K}}{\sqrt{\vec{K}^2 + m^2}} = \vec{\beta}_K \cdot \vec{q}. \quad (3.39)$$

Na formulação (3.35) podemos usar uma outra aproximação, a chamada “smoothing approximation” [18], a qual assume que a função de emissão tenha uma dependência muito fraca do momento relativo, de modo que possamos escrever

$$g(x, k_1)g(x, k_2) = g(x, K + q/2)g(x, K - q/2) \approx g(x, K)g(x, K) \quad (3.40)$$

na qual temos utilizado as expressões (3.36). Desse modo a Eq.(3.35) será reescrita como

$$C(q, K) = 1 + \left| \frac{\int d^4x g(x, K) e^{iq \cdot x}}{\int d^4x g(x, K)} \right|^2. \quad (3.41)$$

Utilizando a definição da média de um observável, tendo como peso a própria função de emissão, a expressão acima reduz-se a

$$C(q, K) = 1 + \left| \langle e^{iq \cdot x} \rangle \right|^2. \quad (3.42)$$

Expandindo o segundo termo da expressão (3.42) acima até a segunda ordem, encontraremos que a função de correlação adquire a forma

$$C(q, K) \approx 1 + e^{-q^\mu q^\nu \{ \langle x_\mu x_\nu \rangle - \langle x_\mu \rangle \langle x_\nu \rangle \}}. \quad (3.43)$$

A componente temporal pode ser eliminado através da chamada “condição de camada-de-massa”, definida na Eq.(3.39), sendo $\vec{\beta} = (\beta_\perp, 0, \beta_l)$ no sistema-*osl*. Este sistema é um sistema cartesiano onde as letras significam *o*- “out”, *s*- “side”, *l*- “longitudinal”. Tal sistema define a direção “out” como sendo paralela à direção

do momento médio transversal, e a direção “side”, perpendicular à mesma. Isto conduz a reescrever a função de correlação na forma

$$C(q, K) \approx 1 + e^{-\sum_{i,j=0,sl} R_{ij}^2(K)q_iq_j}, \quad (3.44)$$

onde $R_{ii} \equiv R_i$. Com a devida aproximação feita acima, encontramos as expressões para o raio efetivo,

$$\begin{aligned} R_o^2 &= \langle (x - \beta_{\perp}t)^2 \rangle - \langle x - \beta_{\perp}t \rangle^2, \\ R_s^2 &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \langle y^2 \rangle, \\ R_l^2 &= \langle (z - \beta_l t)^2 \rangle - \langle z - \beta_l t \rangle^2, \\ R_{os}^2 &= \langle (x - \beta_{\perp}t)y \rangle - \langle x - \beta_{\perp}t \rangle \langle y \rangle, \\ R_{ol}^2 &= \langle (x - \beta_{\perp}t)(z - \beta_l t) \rangle - \langle x - \beta_{\perp}t \rangle \langle z - \beta_l t \rangle, \\ R_{sl}^2 &= \langle y(z - \beta_l t) \rangle - \langle y \rangle \langle z - \beta_l t \rangle, \end{aligned} \quad (3.45)$$

as quais mostram sua dependência direta no momento médio e no tempo. Observamos, porém, que o raio efetivo associado à direção “side”, carece de tais dependências.

Os termos $q_s q_o$ e $q_s q_l$ desaparecem se considerarmos uma simetria cilíndrica no sistema. Se assim mesmo considerarmos uma fonte invariante por boost longitudinal, como é o caso do modelo de Bjorken, a componente $q_o q_l$ também desaparecerá. Desse modo, a função de correlação se simplifica em

$$C(q, K) = 1 + e^{-R_o^2(K)q_o^2 - R_s^2(K)q_s^2 - R_l^2(K)q_l^2}. \quad (3.46)$$

A formulação apresentada por Pratt [17], dada na Eq.(3.34), generaliza a função de correlação com base no formalismo de densidade de Wigner, onde considera que o espaço de fase poderia não estar desacoplado. Depois, ainda sobre esta temática, foram introduzidas generalizações covariantes [7, 18] para o estudo das correlações. A seguir, na seguinte seção, trataremos muito brevemente o formalismo apresentado na ref. [7], na qual foi desenvolvida uma generalização da formulação de Wigner.

3.3 Generalização da formulação de Pratt

Para a formulação da função de correlação estudada na seção 3.2, consideramos a emissão e detecção de pions isolados de outras partículas emitidas, razão pela qual, entre a emissão e detecção destas partículas, as trajetórias dominantes seriam as clássicas.

A proposta da Ref. [7] foi levar em conta a contribuição das outras partículas emitidas sobre um único pion, através de Teoria de Transporte Clássico, descrita por uma dinâmica clássica de colisões. Nesse caso, devido à transferência de momento em cada colisão específica, o momento de cada partícula muda descontinuamente e as trajetórias das partículas são, portanto, em “zigzag”, no espaço das coordenadas. A proposta, da Ref. [7], é levar em conta a dispersão das coordenadas, no espaço de fase, em torno das trajetórias clássicas, de modo a incorporar efeitos mínimos devido ao Princípio de Incerteza de Heisenberg.

Para a formulação da função de correlação que leva em conta as considerações precedente, os autores da ref. [7] obtiveram uma distribuição inclusive das configurações de multipions finais, a qual temos desenvolvido no Apêndice D. Tal distribuição tem a forma geral

$$P(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \langle C_{N,n} \rangle \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n D_{\Delta}(q_{i\sigma_i}, \vec{K}_{i\sigma_i}), \quad (3.47)$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ denotam as permutações dos vetores de índices n , sendo $\vec{q}_{ij} = \vec{k}_i - \vec{k}_j$ e $\vec{K}_{ij} = (\vec{k}_i + \vec{k}_j)/2$ os vetores momento relativo e o momento médio, respectivamente, e

$$C_{N,2} = \frac{N!}{(N-2)!},$$

sendo N a multiplicidade total. Devemos notar que o índice Δ na Eq.(3.47) indica a introdução das incertezas associadas à dispersão das coordenadas no espaço de fase, discutidas anteriormente.

A distribuição do pacote de onda no momento da emissão é escrito como

$$D_{\Delta}(\pm q, K) = \int d^4 p \int d^4 x e^{\pm i q \cdot x} g(x, p) \tilde{\delta}_{\Delta}(q, p - K) \quad (3.48)$$

onde

$$\tilde{\delta}_{\Delta}(q, p) = \frac{1}{(2\pi \Delta p^2)^{3/2}} e^{p/2\Delta p^2} e^{q^2 \Delta x^2/2} \quad (3.49)$$

é a função delta suavizada na forma de uma gaussiana. Podemos notar que para o limite $\Delta x, \Delta p \rightarrow 0$, $\tilde{\delta}_{\Delta}(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow \delta^3(\vec{p})$. A distribuição de emissão é escrita como a transformada de Fourier espaço-temporal da função de fonte, isto é,

$$g(q, p) = \int d^4 x g(x, p) e^{i q \cdot x} \quad (3.50)$$

Segundo este formalismo, a intensidade de probabilidade P de observação conjunta de dois bosons idênticos tem a forma geral

$$P_2(k_1, k_2) = \langle C_{N,2} \rangle \{ D_{\Delta}(0, k_1) D_{\Delta}(0, k_2) + D_{\Delta}(q, K) D_{\Delta}(-q, K) \}, \quad (3.51)$$

e para uma partícula,

$$\begin{aligned} P_1(k_i) &= \langle C_{N,1} \rangle D_\Delta(0, k_i) \\ &= \langle C_{N,1} \rangle \int d^4p \int d^4x \tilde{\delta}_\Delta(0, p - k_i) D_\Delta(0, k_i). \end{aligned}$$

Com isto, a função de correlação para duas partículas, segundo a Eq.(3.32) fica:

$$C(k_1, k_2) = \mathcal{N} \left\{ 1 + \frac{D_\Delta(q, K) D_\Delta(-q, K)}{D_\Delta(0, k_1) D_\Delta(0, k_2)} \right\} \quad (3.52)$$

onde \mathcal{N} é igual a $C_{N,2}/C_{N,1}$. Esse valor só será diferente da unidade caso a distribuição não for de Poisson, mas para nossas considerações vamos considerá-lo $\mathcal{N} \approx 1$.

Brevemente, no capítulo 5, estaremos utilizando este formalismo com o intuito de introduzir os pacotes de onda na função de correlação.

Capítulo 4

Densidade média de espaço de fase

4.1 Proposta de Bertsch

Usando o modelo simples da função de correlação da Eq.(3.34), apresentada por Pratt [17]:

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 1 + \frac{\int d^4x d^4x' g(x, \vec{K}) g(x', \vec{K}) \cos(q \cdot (x - x'))}{\int d^4x g(x, \vec{k}_1) \int d^4x g(x, \vec{k}_2)}, \quad (4.1)$$

sendo $g(x, \vec{k})$ a probabilidade de emitir um pion com momentum \vec{k} do ponto x do espaço-tempo, Bertsch propôs uma maneira de obter a densidade média de pions no espaço de fase $\langle f \rangle^*$, a partir do conhecimento da própria função de correlação de pions idênticos [6], e do espectro de partícula única, quantidades estas que podem ser medidas experimentalmente. Fazendo a hipótese de que todos os pions com momento \vec{K} sofressem sua última interação no mesmo instante t_f , independentemente de sua distribuição espacial, a relação entre f e g pode ser escrita na forma

$$g(x, \vec{K}) \equiv \delta(t - t_f) \frac{f(\vec{r}, \vec{K})}{(2\pi)^3}. \quad (4.2)$$

Por outro lado, a função de correlação é dado como

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 n^{(2)}}{d^3 k_1 d^3 k_2}}{E_1 \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 k_1} E_2 \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 k_2}}$$

*Alternativamente, $g(\vec{r}, \vec{K})$, função de fonte de pions, pode ser interpretada como o número de pions que sofreram sua última interação em um volume 6-dimensional do espaço de fase, por unidade de tempo. Já $f(\vec{r}, \vec{K})$, é definida como o número de pions por volume h^3 em um espaço de fase 6-dimensional.

sendo

$$P_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = E_1 E_2 \frac{d^6 n^{(2)}}{d^3 k_1 d^3 k_2}$$

a probabilidade de detecção conjunta de duas partículas e

$$P_1(\vec{k}_i) = E_i \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 k_i}$$

o espectro de partícula única.

Com isto, o correlator (4.1) torne-se

$$\frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_1} \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_2} [C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] = \int d^4 x d^4 x' g(x, \vec{K}) g(x', \vec{K}) \cos(q \cdot (x - x'))$$

Introduzindo a Eq.(4.2) na expressão acima e integrando ambos lados em relação ao 3-momentum relativo, \vec{q} , Bertsch obteve

$$\int d^3 q \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_1} \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_2} [C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r f^2(\vec{r}, \vec{K}) \quad (4.3)$$

Fazendo o mesmo para o espectro de uma única partícula, mas sem a integração em q , e substituindo \vec{k}_i por \vec{K} , ele encontrou

$$\frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{K}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r f(\vec{r}, \vec{K}) \quad (t > t_f) \quad (4.4)$$

De forma que a média de $f(\vec{r}, \vec{K})$ será dada por

$$\langle f \rangle_{\vec{K}} = \frac{\int d^3 r f(\vec{r}, \vec{K}) f(\vec{r}, \vec{K})}{\int d^3 r f(\vec{r}, \vec{K})}$$

tendo por peso a própria função $f(\vec{r}, \vec{K})$. Desse modo, a média $\langle f \rangle$ pode ser escrita na forma conhecida como

$$\langle f \rangle_{\vec{K}} = \left[\frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{K}} \right]^{-1} \int d^3 q \left[\frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_1} \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_2} \right] [C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] \quad (4.5)$$

4.2 Análise do espectro

Utilizando a chamada “smoothing approximation”, isto é, considerando que $\vec{k}_{1,2} = \vec{K} \pm \vec{q}/2 \approx \vec{K}$, os espectros em função de \vec{k}_1 e \vec{k}_2 , na Eq. (4.5), coincidem com o espectro em termos do momento médio \vec{K} . Ou seja,

$$\frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_1} = \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{k}_2} = \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 \vec{K}} \quad (4.6)$$

A hipótese de que se forme uma estrutura de “platô” central na distribuição de rapidez em colisões a altas energias, tratada no capítulo 2, aliada à que considera o movimento longitudinal desacoplado do transversal, permite escrever o espectro na forma

$$\frac{dn}{E_{\vec{K}} dy} \frac{d^2 n}{d^2 K_T},$$

onde $E_{\vec{K}} = \sqrt{K^2 + m_\pi^2}$.

Considerando ainda que o sistema em expansão tenha simetria cilíndrica, como é o caso do modelo de Bjorken, o espectro na direção transversal pode ser escrito como

$$\frac{d^2 n}{d^2 K_T} = \frac{dn}{2\pi K_T dK_T}$$

onde o fator 2π reflete a simetria azimutal considerada no problema.

Por outro lado, na ref. [6] o espectro foi parametrizado segundo a forma exponencial

$$\frac{dn}{K_T dK_T} = \frac{1}{T_f^2} e^{-K_T/T_f}, \quad (4.7)$$

refletindo um comportamento próximo do que é observado experimentalmente.

4.3 $f(\vec{r}, \vec{K})$ média

Considerando os resultados da seção precedente, a média (4.5) toma a forma

$$\langle f \rangle_{\vec{K}} = \frac{dn}{E_{\vec{K}} dy} \frac{1}{2\pi T_f^2} e^{-K_T/T_f} \int d^3 q [C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1], \quad (4.8)$$

onde $E_{\vec{K}} = \sqrt{K^2 + m_\pi^2}$.

A função de correlação que Bertsch utilizou corresponde à forma gaussiana como função dos raios correspondentes às direções “out”, “side” e “longitudinal”, sendo a dependência no tempo incluída em R_{out} e R_{long} :

$$C(\vec{q}, \vec{K}) = 1 + e^{-R_o^2(\vec{K})q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2(\vec{K})q_l^2}. \quad (4.9)$$

Devemos notar que os raios associados às direções “out” (de “outwards”), e “side” (de “sideways”), segundo as relações (3.45), dependem, respectivamente, das componentes do momento médio K_x e K_z , e do tempo τ (isso significa que tais raios terão valores diferentes para diferentes valores fixos de K_x , K_z e τ , fazendo com que a forma ideal da função de correlação seja quebrada pela sensibilidade desses parâmetros). Para efeito de cálculo iremos tratar tais raios como valores estabelecidos pela experiência, de modo a que a função de correlação seja só dependente do momento relativo, \vec{q} .

Substituindo a Eq.(4.9) em (4.8), obtemos

$$\int d^3q [C(\vec{q}) - 1] = \frac{\pi^{3/2}}{R_o R_s R_l}$$

de modo que a média de $f(\vec{r}, \vec{K})$, torna-se

$$\langle f \rangle_{\vec{K}} = \left(\frac{dn}{dy} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2R_o R_s R_l T_f^2} \frac{1}{\sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} e^{-K_T/T_f}. \quad (4.10)$$

Estamos considerando que a componente longitudinal do momento médio seja nulo, isto é, $K_l = 0$. O gráfico ilustrativo do comportamento da média acima pode ser feito utilizando os dados da ref. [20], (pág. 200), com os seguintes valores para os parâmetros: $R_T \approx R_{T_o} \approx R_{T_s} = 3.56$ fm, $R_l = 2.52$ fm, $T_f = 170$ MeV e $m_\pi \approx 140$ MeV. Para dn/dy foi estimado um valor ≈ 2.2 obtido pela integração da expressão ajustada com base nos dados da Fig.3 da ref. [21], em torno da rapidez central no sistema de laboratório, $y_0 \approx 1.46$, considerando como intervalo de integração ± 0.10 em torno do mesmo valor de y_0 . Na expressão acima, $E_{\vec{K}} = \sqrt{K^2 + m_\pi^2} \approx \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}$ no intervalo $-0.1 < y - y_0 < 0.1$.

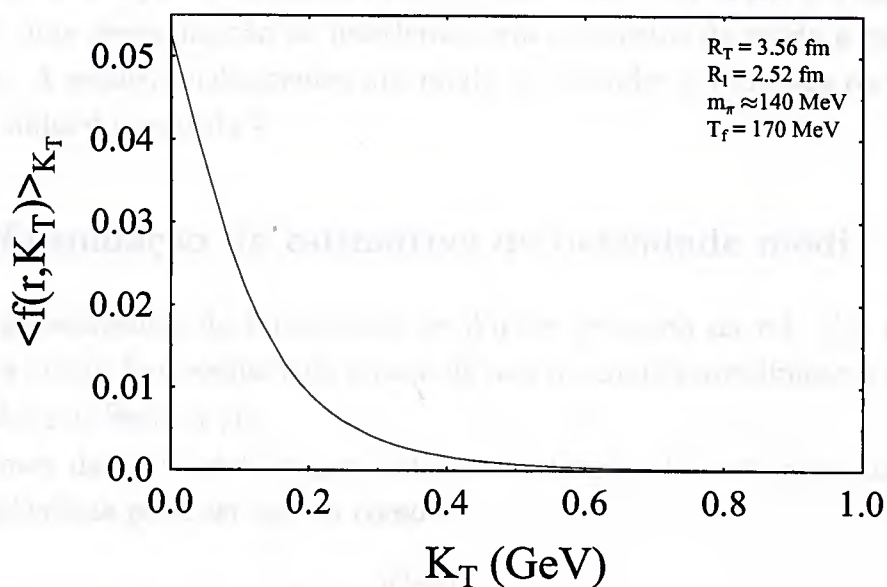


Figura 4.1: Média da função $f(\vec{r}, \vec{K}_T)$ por unidade de dn/dy , segundo o modelo de Bertsch, porém, adotando os valores sugeridos nas ref. [20, 21]. A expressão de $\langle f(\vec{K}_T) \rangle$ é dada na Eq.(4.10).

Capítulo 5

Estimativa da densidade do espaço de fase

Resumimos no capítulo 4 a proposta de Bertsch para a estimativa da média da densidade do espaço de fase, baseada no conhecimento do espectro de uma partícula e da função de correlação de dois bosons idênticos. Nela, porém, ele se limitou a considerar casos compatíveis com o formalismo de Wigner no limite em que as incertezas associadas à dispersão das coordenadas em torno de trajetórias clássicas no espaço de fase sejam desprezíveis ($\Delta x \sim \Delta p \sim 0$). Na seção 3.3 discutimos brevemente uma generalização de interferometria e espectro de modo a considerar $\Delta x \Delta p \neq 0$. A seguir, analizaremos um modo de estender a proposta de Bertsch, seguindo a linha do capítulo 4.

5.1 Reformulação da estimativa de densidade média

Com a generalização do formalismo de Wigner proposta na ref. [7], podemos reformular a média da densidade do espaço de fase seguindo procedimentos análogos aos utilizados por Bertsch [6].

Em termos da seção de choque inclusiva, a função de correlação para duas partículas idênticas pode ser escrita como

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 \sigma^{(2)}}{d^3 k_1 d^3 k_2}}{E_1 \frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_1} E_2 \frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_2}} = \frac{P_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{P_1(\vec{k}_1) P_1(\vec{k}_2)}.$$

Segundo o formalismo da ref. [7], resumido na seção 3.3, a função de correlação pode também ser escrita na forma

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{P_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{P_1(\vec{k}_1) P_1(\vec{k}_2)} \sim 1 + \frac{D_\Delta(q, \vec{K}) D_\Delta(-q, \vec{K})}{D_\Delta(0, \vec{k}_1) D_\Delta(0, \vec{k}_2)}.$$

Comparando as duas expressões acima, podemos escrever

$$\left[\frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_1} \frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_2} \right] [C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] = D_\Delta(q, \vec{K}) D_\Delta(-q, \vec{K}). \quad (5.1)$$

Neste ponto queremos ressaltar que, como a correlação $[C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1]$ e os espectros de partícula única são estritamente proporcionais a $D_\Delta(q, \vec{K}) D_\Delta(-q, \vec{K})$, podemos reescrevê-los na forma $[C_\Delta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1]$ e $d^3 \sigma^{(1)}/d^3 k_i|_\Delta$, com a introdução do sub-índice Δ , o qual indica sua dependência nos pacotes de onda. Tais serão as notações que utilizaremos, a seguir, para a função de correlação e para o espectro sempre que nelas estejam introduzidos os pacotes de onda.

A distribuição de fonte no momento da emissão, incluindo os pacotes de onda finitos, dada na Eq.(3.48), pode ser reescrita como

$$D_\Delta(\pm q, \vec{K}) = \int d^4 x d^3 p e^{\pm i q \cdot x} g(x, \vec{p}) \tilde{\delta}_\Delta(\pm \vec{q}, \vec{p} - \vec{K}),$$

onde utilizamos a identidade $g(q, \vec{p}) = \int d^4 x g(x, \vec{p}) e^{i q \cdot x}$, sendo que, na equação acima $\tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\Delta p^2)^{3/2}} e^{-\vec{p}/2\Delta p^2} e^{-\vec{q}^2 \Delta x^2/2}$. Dessa forma o fator

$$\begin{aligned} D_\Delta(q, \vec{K}) D_\Delta(-q, \vec{K}) &= \int d^4 x d^3 p d^4 x' d^3 p' g(x, \vec{p}) g(x', \vec{p}') \times \\ &\times \tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p} - \vec{K}) \tilde{\delta}_\Delta(-\vec{q}', \vec{p}' - \vec{K}) \cos[q \cdot (x - x')], \end{aligned}$$

ao ser substituído na equação (5.1), resultará em

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_1} \Big|_\Delta \frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_2} \Big|_\Delta \right] [C_\Delta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] &= \int d^4 x d^3 p d^4 x' d^3 p' g(x, \vec{p}) g(x', \vec{p}') \times \\ &\times \tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p} - \vec{K}) \tilde{\delta}_\Delta(-\vec{q}', \vec{p}' - \vec{K}) \cos[q \cdot (x - x')]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Como na proposta feita por Bertsch [6], vamos considerar que todos os pions com momento \vec{K} sofram sua última interação no instante t_f , de modo que

$$g(x, \vec{p}) = g(t, \vec{r}, \vec{p}) \equiv \delta(t - t_f) \frac{f(\vec{r}, \vec{p})}{(2\pi)^3}. \quad (5.3)$$

Integrando ambos lados da expressão (5.2) em relação ao 3-momento relativo, $d^3 q$, e inserindo as equações (5.3) e (3.49) em (5.2), encontraremos que

$$\begin{aligned} \int d^3 q \left[\frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_1} \Big|_\Delta \frac{d^3 \sigma^{(1)}}{d^3 k_2} \Big|_\Delta \right] [C_\Delta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] &= \frac{1}{(2\pi)^6 (2\pi\Delta p^2)^3} \left(\frac{\pi^{1/2}}{\Delta x} \right)^3 \times \\ \int d^3 \vec{r} d^3 \vec{p} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{p}' f(\vec{r}, \vec{p}) f(\vec{r}', \vec{p}') e^{-[(\vec{p}-\vec{K})^2 + (\vec{p}'-\vec{K})^2]/2\Delta p^2} e^{-(\vec{r}-\vec{r}')^2/4\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Agora, o espectro de partícula única, $P_1(\vec{k}_i) = E_{k_i} d^3\sigma/d^3k_i|_{\Delta}$, pode ser escrito como

$$P_1(\vec{k}_i) = E_{\vec{k}_i} \frac{d^3\sigma}{d^3k_i} \Big|_{\Delta} = \frac{1}{(2\pi)^3 (2\pi\Delta p^2)^{3/2}} \int d^3\vec{r} d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}) e^{-(\vec{p}-\vec{k}_i)^2/2\Delta p^2}. \quad (5.5)$$

Dentro dessa nova abordagem, podemos definir uma nova função $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)$ após o desacoplamento (freeze-out) do sistema como

$$f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p) = \frac{1}{(2\pi\Delta p^2)^{3/2}} f(\vec{r}, \vec{p}) e^{-(\vec{p}-\vec{K})^2/2\Delta p^2}. \quad (5.6)$$

Com isto, a expressão (5.5) acima, torna-se

$$E_{\vec{k}_i} \frac{d^3\sigma}{d^3k_i} \Big|_{\Delta} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{r} d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p) \quad (5.7)$$

e (5.4) fica

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{q} \left[\frac{d^3\sigma^{(1)}}{d^3k_1} \Big|_{\Delta} \frac{d^3\sigma^{(1)}}{d^3k_2} \Big|_{\Delta} \right] [C_{\Delta}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{r} d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x) f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p), \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde incorporamos à $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x)$ a dependência em Δx , como

$$f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x) = \frac{1}{(2\pi^{1/2}\Delta x)^3} \int d^3\vec{r}' d^3\vec{p}' f(\vec{r}', \vec{p}'; \Delta p) e^{-(\vec{r}-\vec{r}')^2/4\Delta x^2}. \quad (5.9)$$

Devemos notar que, no limite $\Delta p \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, tanto $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)$ quanto $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x)$ se reduzem a $f(\vec{r}, \vec{p})$, verificando a correção do procedimento de generalização. As funções $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)$ e $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x)$ foram definidas de modo a ressaltar a semelhança da presente generalização em relação à proposta de Bertsch. Dessa forma vemos que, dentro da generalização que inclui pacotes de onda não nulos, a densidade do espaço de fase é escrita como

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{\int d^3\vec{r} d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p, \Delta x) f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)}{\int d^3\vec{r} d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)}, \quad (5.10)$$

tendo como função peso $f(\vec{r}, \vec{p}; \vec{K}; \Delta p)$. Para exprimir o denominador da média acima em termos do espectro utilizamos a expressão (5.7), e para o numerador, utilizamos (5.8), resultando em

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle = \left(\frac{d^3\sigma}{d^3K} \Big|_{\Delta} \right)^{-1} \int d^3\vec{q} \left[\frac{d^3\sigma^{(1)}}{d^3k_1} \Big|_{\Delta} \frac{d^3\sigma^{(1)}}{d^3k_2} \Big|_{\Delta} \right] [C_{\Delta}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1]. \quad (5.11)$$

Vemos que a relação acima é a análoga à Eq.(4.5). Devemos notar porém, que as parametrizações da densidade de espaço de fase, (5.6), e da função de fonte, (5.3), são as generalizadas, isto é, as que contém os pacotes de onda.

Se considerarmos ainda a chamada “smoothing approximation”, expressa na Eq.(3.40), teremos

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{d^3 \sigma}{d^3 K} \Big|_{\Delta} \int d^3 \vec{q} [C_{\Delta}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1] \quad (5.12)$$

Com os resultados (5.11) e (5.12) acima, vemos que a forma para a estimativa da densidade $\langle f \rangle$ proposta por Bertsch não é alterada com a introdução dos pacotes de onda. O que é modificado, porém, é o modo de calcular o espectro e a função de correlação de dois pions, onde a introdução dos pacotes de onda está implícita. Dessa forma, precisamos determinar estas funções, o que será feito nas sessões seguintes.

5.2 Distribuição gaussiana

O exemplo mais simples para analisar a influência dos pacotes de onda na função de correlação de dois pions e na determinação da densidade do espaço de fase é considerar o caso de uma fonte estática, com distribuição não relativística de momentos, inteiramente desacoplada da espaço-temporal. Particularmente simples é o caso em que a fonte emissora de partículas é parametrizada por gaussianas [7],

$$g(x, \vec{p}) = \rho(t, x, y, z) h(p_x, p_y, p_z),$$

onde

$$\begin{aligned} \rho(t, x, y, z) &\propto e^{-t^2/2\tau^2 - x^2/2R_x^2 - y^2/2R_y^2 - z^2/2R_z^2}, \\ h(p_x, p_y, p_z) &\propto e^{-p_x^2/2P_x^2 - p_y^2/2P_y^2 - p_z^2/2P_z^2}, \end{aligned}$$

sendo $\tau^2 = \langle t^2 \rangle$, $R_i^2 = \langle r_i^2 \rangle$, e $P_i^2 = \langle p_i^2 \rangle$. Em toda a discussão que se segue, estaremos considerando o sistema natural de unidades, em que $\hbar = c = 1$.

Se estimarmos a função de correlação através da relação (3.33), cujo integrando depende apenas da distribuição $\rho(x)$, a forma particular da distribuição de momentos não terá importância. Porém, mesmo na ausência de pacotes de onda, se utilizarmos a formulação baseada na função de Wigner, sobrarão uma fraca dependência na largura P da distribuição de momentos. No caso da distribuição acima, isto se dará através de um fator $\exp(P^2 q^2/2)$, o qual é desprezado na chamada “smoothing approximation” (correspondendo a considerar $k_1 \sim k_2 \sim K$). Nessa condições, no

caso em que possamos considerar desprezível a largura do pacote, i.e., $\Delta x \sim \Delta p \sim 0$, a função de correlação é dada por

$$C(q) = 1 + \left| \rho(q^0, q_x, q_y, q_z) \right|^2 \quad (5.13)$$

onde

$$\rho(q^0, q_x, q_y, q_z) \propto e^{-\tau^2(q^0)^2/2 - R_x^2 q_x^2/2 - R_y^2 q_y^2/2 - R_z^2 q_z^2/2},$$

a qual é a transformada de Fourier de $\rho(t, x, y, z)$. Desse modo, vemos que $g(q, p) = \rho(q^0, q_x, q_y, q_z)h(p_x, p_y, p_z)$ é fatorada. Nesse caso, utilizando a Eq.(3.49), a expressão (3.48), assume a forma

$$D_\Delta(\pm q, \vec{K}) \propto \sigma(K_x, K_y, K_z) e^{-\tau^2(q^0)^2/2 - \sum_{i=x,y,z} (R_i^2 + \Delta x^2) q_i^2/2}, \quad (5.14)$$

onde

$$\sigma(K_x, K_y, K_z) \propto e^{-\sum_{i=x,y,z} K_i^2/[2(P_i^2 + \Delta p^2)]}.$$

Analogamente, o espectro de uma única partícula com momentum k_1 ou k_2 pode ser escrito como

$$D_\Delta(0, k_{x_{1(2)}}, k_{y_{1(2)}}, k_{z_{1(2)}}) \approx \sigma(k_{x_{1(2)}}, k_{y_{1(2)}}, k_{z_{1(2)}}) \propto e^{-\sum_{i=x,y,z} k_{i_{1(2)}}^2/[2(P_i^2 + \Delta p^2)]}. \quad (5.15)$$

Assim, através da Eq.(3.52), podemos estimar a função de correlação para dois pions $C_\Delta(k_1, k_2)$, levando em conta, através de pacotes de onda finitos, as flutuações quânticas em torno das trajetórias clássicas como

$$C_\Delta(k_1, k_2) = 1 + \frac{D_\Delta(q, K)D_\Delta(-q, K)}{D_\Delta(0, k_1)D_\Delta(0, k_2)}.$$

Substituindo, então, as equações (5.14) e (5.15) na equação acima e lembrando que $\vec{k}_{1,2} = \vec{K} \pm \vec{q}/2$, a função de correlação torna-se

$$C_\Delta(\vec{q}) = 1 + e^{-\tau^2(q^0)^2 - R_{\Delta,x}^2 q_x^2 - R_{\Delta,y}^2 q_y^2 - R_{\Delta,z}^2 q_z^2}, \quad (5.16)$$

sendo $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + \Delta x^2 - 1/4(P_i^2 + \Delta p^2)$, com $i = x, y, z$. Devemos notar que o último termo do raio efetivo, $1/4(P_i^2 + \Delta p^2)$, desaparece quando, nos espectros de partícula única, consideramos a chamada “smoothing approximation”, isto é,

$$\sigma(k_{x_1}, k_{y_1}, k_{z_1}) \approx \sigma(k_{x_2}, k_{y_2}, k_{z_2}) \approx \sigma(K_x, K_y, K_z),$$

resultando em $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + \Delta x^2$. A função de correlação para esse modelo gaussiano que iremos utilizar a partir de agora será aquela correspondente a esse raio efetivo, isto é, decorrente da hipótese de ser $k_1 \sim k_2 \sim K$.

5.2.1 Incerteza mínima

Considerando o caso de incerteza mínima, isto é, $\Delta x \Delta p = 1/2$, e considerando que as flutuações no momento sejam dados por $\Delta p \approx \sqrt{m_\pi T_f}$, conforme sugerido em [7], onde m_π é a massa do pion e T_f a temperatura efetiva do modelo pseudo-térmico [22], a função de correlação obtida na Eq.(5.16) permanece com a mesma forma, porém, os raios efetivos passam a ter um valor definido por

$$R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + \frac{1}{4m_\pi T_f} \quad (5.17)$$

5.2.2 Comparação das correlações

Nesta seção vamos comparar nossa função de correlação com expressão análoga àquela utilizada por Bertsch na Eq.(4.9), a qual pode ser reescrita em termos das componentes transversal e longitudinal do momentum relativo. Daqui em diante consideraremos sempre essa dependência da função de correlação, em função das componentes q_T e q_l . Vamos supor que a função de fonte seja parametrizada na forma de uma gaussiana, porém, definindo a direção z como aquela de incidência dos ions pesados (longitudinal) e $r_T^2 = x^2 + y^2$, definindo a coordenada transversal,

$$g(t, r_T, z, K) \propto e^{-t^2/2\tau^2} e^{-r_T^2/2R_T^2} e^{-z^2/2R_z^2} e^{-K^2/2\Delta K^2}. \quad (5.18)$$

Dessa forma, a função de correlação terá a forma

$$C(q^0, q_T, q_z) = 1 + e^{-\tau^2(q^0)^2 - R_T^2 q_T^2 - R_z^2 q_z^2}. \quad (5.19)$$

Se utilizarmos a chamada “condição de camada de massa” (mass-shell constraint), isto é, $q^0 = \vec{q} \cdot \vec{\beta}$, onde $\vec{\beta} = \vec{K}/\sqrt{K^2 + m_\pi^2}$, esta função de correlação pode ser reescrita como

$$C(q_T, q_l, K) = 1 + e^{-R_T^2(K)q_T^2 - R_l^2(K)q_l^2}. \quad (5.20)$$

O modelo gaussiano com os pacotes de onda (5.17) também será escrito em termos da dependência no momento relativo transversal e no momentum relativo longitudinal. Seguindo a mesma linha de desenvolvimento feito na seção 5.2, teremos

$$C_\Delta(q_T, q_l, K) = 1 + e^{-R_{\Delta,T}^2(K)q_T^2 - R_{\Delta,l}^2(K)q_l^2} \quad (5.21)$$

onde $R_{\Delta,i}^2$ é definido como $R_i^2(K) + 1/4m_\pi T_f$.

Neste ponto devemos notar que os raios efetivos dependem implicitamente do momento médio K e do tempo τ , os quais certamente influenciarão nos valores de

tais parâmetros. Para efeito de cálculo iremos tratá-los como valores fixos estabelecidos pela experiência. Vamos utilizar os seguintes parâmetros extraídos dos resultados experimentais [20] : $R_T = 3.56$ fm e $R_l = 2.52$ fm. Sendo a massa do pion $m_\pi \sim 140$ MeV, consideraremos ainda que a temperatura seja $T_f = 170$ MeV. Tais valores foram retirados da ref. [23], tendo sido ajustados pela função de correlação de $\pi^+\pi^+$ e de espectro de partícula única, obtidos pela colisão Si+Au a 14.6 AGeV/c, no Brookhaven Nation Lab. (BNL) no AGS (Colab. E859). Consideramos ainda que o momentum transversal médio, só nesta comparação de gráficos, situa-se em torno de $K_T = 200$ MeV. Por simplicidade, adotaremos o valor de K_l nulo. Na figura 5.1 estão representadas estas correlações supondo que disporíamos de estatística ilimitada nos momentos relativos, ou seja, que $q_T = 0$ para $C(q_l) \times q_l$ e $q_l = 0$ para $C(q_T) \times q_T$. As curvas correspondentes ao modelo gaussiano com os pacotes mínimos indicam um leve aumento do tamanho efetivo da fonte emissora de pions, uma vez que apresentam uma diminuição na largura de correlação. Podemos observar uma diferença mais acentuada na direção longitudinal. A razão dessas diferenças está no fato de termos incorporado os pacotes de onda mínimo na função de correlação, isto é, $\Delta p \Delta x = 1/2$, sendo $\Delta p \approx \sqrt{m_\pi T_f}$. Em consequência, conforme a Eq.(5.17), o raio efetivo é acrescido do valor $(4m_\pi T_f)^{-1}$ em relação ao parâmetro R_i^2 .

Calculemos agora a média da densidade de pions no espaço de fase, tal qual foi discutido no capítulo 4. Vamos dividir os casos de modo a separá-los em duas regiões cinemáticas. A primeira corresponde a fixar $y = (y_1 + y_2)/2 = 0$ e a segunda correspondente a $y \neq 0$.

5.2.3 Densidade média do espaço de fase na região central de rapidez

Considerando válida a chamada “smoothing approximation”, vimos no capítulo precedente que a densidade média do espaço de fase pode ser escrita como na Eq.(4.8), isto é,

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{d^3 n^{(1)}}{d^3 K} \Big|_{\Delta} \int d^3 q [C_{\Delta}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) - 1].$$

Vamos supor que o espectro possa ser fatorado em uma parte transversal e uma parte longitudinal, isto é,

$$\frac{d^3 n}{d^3 K} \Big|_{\Delta} = \frac{dn}{dK_z} \frac{d^2 n}{d^2 K_T} \Big|_{\Delta}.$$

Em termos da variável de rapidez, y , e da massa transversal, a parte longitudinal do momentum médio de pions poderia ser aproximadamente escrita na forma $K_L \simeq M_T \sinh y$ (sendo $M_T = \sqrt{\vec{K}_T^2 + m_\pi^2}$), em um determinado sistema de referência. Dessa forma, o espectro na direção longitudinal poderá ser escrito então como $dn/E_K dy$. Se o sistema apresentar simetria cilíndrica, como no caso do modelo de Bjorken que analizaremos mais à frente, o espectro na direção transversal poderá ser escrito como $[dn/2\pi K_T dK_T]_\Delta$. Decompondo ainda o elemento de volume no espaço dos momentos relativos d^3q , em $dq_L dq_T q_T d\phi_{q_T}$, caso a função de correlação independa do ângulo ϕ_{q_T} , após a integração em $d\phi_{q_T}$ no intervalo $0 < \phi_{q_T} < 2\pi$, obtemos o fator 2π . Este, então, cancelará o fator idêntico no denominador. Desse modo, para sistemas com simetria cilíndrica, a média anterior tomará a forma

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle = \left[\frac{dn}{E_K dy} \frac{dn}{K_T dK_T} \right] \Big|_\Delta \int_{-\infty}^{\infty} dq_L \int_0^{\infty} dq_T q_T \times \\ \times [C_\Delta(q_T, q_L, K_T, K_L) - 1]. \quad (5.22)$$

Por simplicidade, vamos inicialmente estimar a densidade de espaço de fase apenas ao longo do plano transversal (perpendicular à direção do feixe), correspondente a $y = (y_1 + y_2)/2 = 0$ (região central de rapidez). Consequentemente, o momento relativo na direção longitudinal será escrito como $q_L = (m_{T_1} + m_{T_2}) \sinh y_1$ devido à relação $y_1 = -y_2$. Para valores fixos dos momentos transversais, isto implicará em $dq_L = (m_{T_1} + m_{T_2}) \cosh y_1 dy_1 = (E_1 + E_2) dy_1 = 2E_K dy_1$. Se quisermos nos restringir apenas ao plano transversal devemos considerar também $q_L \equiv 0$, o que implica $y_1 = 0$ e, consequentemente, $K_L = (m_{T_1} - m_{T_2}) \sinh y_1 = 0$. Na integral em dq_L da Eq.(5.22), podemos impor a restrição ao plano transversal e à região central de rapidez por meio de uma função delta, $\delta(y_1)$

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle \Big|_{y=0} = \frac{1}{E_K} \frac{dn}{dy} \Big|_{y=0} \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta 2 \int_{-\infty}^{\infty} E_K dy_1 \delta(y_1) \int_0^{\infty} dq_T q_T \times \\ \times [C_\Delta(q_T, q_L, K_T, K_L) - 1].$$

Como q_L e K_L dependem de y_1 , tal dependência irá desaparecer na função de correlação após a integração em dy_1 . Finalmente chegamos à forma da densidade média do espaço de fase na região central de rapidez por unidade de rapidez $dn/dy|_{y=0}$, na forma

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle \Big|_{(dn/dy)|_{y=0}} = 2 \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta \int_0^{\infty} dq_T q_T [C_\Delta(q_T, K_T) - 1]. \quad (5.23)$$

Para simplificar a notação, nas discussões a seguir (a menos que explicitamente informado em contrário, sempre que estivermos nos referindo à média $\langle f(\vec{K}) \rangle$), estaremos considerando-a por unidade de rapidez na região central, $dn/dy|_{y=0}$).

Estimando a média (5.23) correspondente às correlações (5.20) e (5.21), obtemos no modelo gaussiano desprezando os pacote de onda

$$\langle f(K_T) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_T^2} \frac{e^{-K_T/T_f}}{T_f^2}; \quad (5.24)$$

e no modelo gaussiano com a inclusão dos pacote de onda mínimos,

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_{\Delta,T}^2} \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_{\Delta}, \quad (5.25)$$

sendo $R_{\Delta,T}^2 = R_T^2 + 1/4m_{\pi}T_f$.

5.2.4 Análise dos espectros

Se utilizarmos o formalismo da ref. [7], o qual, além de introduzir os pacotes de onda, considera que a distribuição de momento é também gaussiana com largura P_i em cada direção, então, obtemos a seguinte distribuição espectral

$$\frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_{\Delta} = \frac{1}{(P_T^2 + m_{\pi}T_f)} e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_{\pi}T_f)}, \quad (5.26)$$

onde fixamos $\Delta p^2 = m_{\pi}T_f$ [7]. Os cálculos que levam ao espectro acima são os mesmos que na seção 5.2, correspondentes a $D_{\Delta}(0, k_1) \sim D_{\Delta}(0, k_2) \sim D_{\Delta}(0, K)$. Por outro lado, se considerarmos o limite em que $\Delta x \sim \Delta p \sim 0$, como foi feito na ref. [6], mas mantendo a mesma distribuição de fonte, obteremos

$$\frac{dn}{K_T dK_T} = \frac{1}{P_T^2} e^{-K_T^2/2P_T^2}. \quad (5.27)$$

No entanto, a forma gaussiana para a distribuição transversal de momentos difere consideravelmente daquela sugerida pelos dados experimentais. Ela só é considerada aqui por completeza dentro da descrição gaussiana para a fonte e para estudar seus efeitos sobre a média do espaço de fase. A distribuição espectral sugerida pela experiência, dada na Eq.(4.7), tem a forma exponencial

$$\frac{dn}{K_T dK_T} = \frac{1}{T_f^2} e^{-K_T/T_f}. \quad (5.28)$$

Nós comparamos estes espectros na figura 5.2, em escala logarítmica, utilizando a temperatura no valor de $T_f = 170$ MeV, conforme mencionado anteriormente, e a massa do pion igual a $m_{\pi} \sim 140$ MeV. Para a largura da fonte, de modo a ilustrar o caso, adotamos o valor arbitrário $P_T = 500$ MeV/c, cerca do triplo do adotado para T_f . Neste gráfico podemos ver que o modelo que considera uma distribuição de

momentos gaussianas difere consideravelmente daquele ajustado por uma exponencial, conforme sugere a experiência. A razão desta diferença vem principalmente, das próprias formas das distribuições, onde a gaussiana decresce muito mais rapidamente com o aumento de K_T . Notamos, ainda, uma grande sensibilidade do modelo gaussiano na largura da fonte, P_T . Esse modelo, porém, quase não é afetado pelo pacote de onda mínimo, sendo a diferença muito pequena entre as curvas gaussianas. Estes espectros serão os que utilizaremos na seção seguinte, na estimativa da média do espaço de fase. O espectro é exibido em unidades arbitrárias tal qual normalmente os dados experimentais são exibidos. A rigor, integrando-o, deveríamos recuperar o número de partículas transversais por unidade de rapidez. Por simplicidade, normalizamos cada um deles à unidade.

5.2.5 Comparação das médias

Conhecidas as funções de correlação e os espectros, conforme discutidos anteriormente, podemos calcular as médias da densidade do espaço de fase correspondentes aos modelos discutidos para estudar as diferenças. Substituindo a Eq.(5.26) em (5.25), teremos

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_{\Delta,T}^2 (P_T^2 + m_\pi T_f)} e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_\pi T_f)} \quad (5.29)$$

onde $R_{\Delta,T}^2 = R_T^2 + 1/4m_\pi T_f$. Vamos, então, considerar que o espectro seja melhor descrito por uma exponencial, como na Eq.(5.28). Nesse caso, substituindo a equação (5.28) em (5.25), teremos

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_{\Delta,T}^2 T_f^2} e^{-K_T/T_f}. \quad (5.30)$$

Podem ainda ser obtidos dos casos acima tomando o limite $\Delta x \sim \Delta p \rightarrow 0$, as médias que denominaremos “sem pacotes”,

$$\langle f(K_T) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_T^2 P_T^2} e^{-K_T^2/2P_T^2}, \quad (5.31)$$

$$\langle f(K_T) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_T^2 T_f^2} e^{-K_T/T_f}. \quad (5.32)$$

Estas médias estão representadas na figura 5.3, onde utilizamos para a temperatura o mesmo valor de $T_f = 170$ MeV, para a largura da fonte $P_T = 500$ MeV, e, para o raio transversal, $R_T = 3.56$ fm [20]. No gráfico observamos que a média, $\langle f(K_T) \rangle$, é principalmente sensível ao espectro, uma vez que a função de correlação

não tem dependência do momento médio e que pouca diferença havia entre as diferentes funções de correlação discutidas anteriormente. A introdução dos pacotes de onda mínimos resulta em pouca diferença para a média do espaço de fase, desde que comparemos as curvas correspondentes às mesmas parametrizações do espectro. Comparando espectros gaussianos com os exponenciais, porém, a diferença é muito grande. Podemos ainda comparar os resultados da figura 5.3 com aquele da Fig. 4.1, refletindo a Eq.(4.10). Vemos que o comportamento das curvas cujo espectro foi ajustado por exponenciais é muito semelhante ao da curva na Fig. 4.1. Ambas referem-se a $\langle f \rangle$ em função de K_T , por unidade de rapidez. A diferença nos valores, representada pelo fator $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ R_l \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2} \right\}$ é explicada pelo fato de $\langle f \rangle$, dado em (5.32) ter sido obtida levando em conta apenas o plano correspondente a $y = 0$, eliminando dependências em q_l e K_l , enquanto que estas foram consideradas na Eq.(4.10).

Se compararmos os valores de $\langle f \rangle$ da Fig. 5.3 com aqueles sugeridos pelos resultados experimentais de interferometria e espectro das refs. [24, 25], veremos que os aqui obtidos são muito menores para K_T equivalentes. Devemos, porém nos lembrar que, nas estimativas acima, consideramos apenas o plano transversal correspondente à região central de rapidez. Além disso, a normalização dos espectros nos reflete o número de partículas, já que esta foi fixada à unidade. As curvas correspondentes à parametrização exponencial do espectro guardam, porém, alguma semelhança com o comportamento daqueles das ref. [24, 25]. No entanto, como seria de esperar, a parametrização gaussiana resulta de um comportamento de $\langle f \rangle$ muito discordante daquele, sem dizer que os valores são acentuadamente menores.

5.3 Densidade média do espaço de fase para $y \neq 0$

Esta região com $y \neq 0$ corresponde a uma extensão daquela considerada nas seções anteriores, na qual K_l e q_l não mais se anulam. Desse modo, a função de correlação será uma função dependente tanto da parte transversal como da longitudinal do momento relativo, isto é, $C_\Delta = C_\Delta(q_T, q_l)$. Para fazer o gráfico de $C(q_T, q_l)$ em função de uma destas variáveis, por exemplo $q_T(q_l)$, teremos que limitar a complementar, no caso $q_l(q_T)$, a algum intervalo. Quando tratamos o problema de modo a estudá-lo apenas teoricamente, podemos fixar $q_l(q_T) = 0$, o que corresponderia a uma situação hipotética em que a estatística experimental seria ilimitada, infinita. Na prática, porém, não é o que ocorre. As limitações experimentais levam a colocar as diferenças de momento em caixinhas (“bins”), ou seja, pequenos intervalos que refletem a resolução experimental. As funções de correlação são, então, projetadas

nas variáveis desejadas (na análise que estamos fazendo, em q_T e q_l). Então, no melhor dos casos, tal que os barras de erro não sejam muito grandes, ao projetar $C(q_T, q_l)$ em função de q_T (q_l), os experimentais consideram apenas o primeiro “bin” em q_l ou (q_T). Para ilustrar o efeito que isto tem sobre a função de correlação, juntamente com os efeitos de pacotes de onda, vamos voltar a estudar os casos anteriores. Então, as funções de correlação são dadas por

$$C(q_T, q_l) = 1 + e^{-R_T^2 q_T^2 - R_l^2 q_l^2},$$

quando podemos considerar desprezíveis as larguras dos pacotes de onda e, quando os consideramos,

$$C_\Delta(q_T, q_l) = 1 + e^{-R_{\Delta,T}^2 q_T^2 - R_{\Delta,l}^2 q_l^2},$$

onde $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + 1/4m_\pi T_f$, correspondendo a adotar $\Delta p = 1/2\Delta x = \sqrt{m_\pi T_f}$.

Para comparar estas funções de correlação, recorreremos aos dados da ref.[20]. Nessa experiência, o primeiro bin de momento transversal e de momento longitudinal medido foi definido na faixa de 15 até 25 MeV. Com estes valores, a média para q_T será $\langle q_T \rangle \simeq 20.42$ e para q_l , $\langle q_l \rangle = 20$. O gráfico da figura 5.4 compara estas correlações, na qual observamos uma pequena diferença nas curvas, devido à introdução dos pacotes de onda nos raios efetivos, essencialmente o mesmo comportamento discutido anteriormente, em relação à Fig. 2.1. Notamos que, apenas o fato de considerarmos “bins” finitos leva a obter um valor máximo para a função de correlação menor do que 2, embora estejamos considerando fontes completamente caóticas.

5.3.1 Comparação das médias

Devemos notar que a média, agora, deverá ter uma contribuição relacionada à distribuição de rapidez, (dn/dy) , uma vez que não mais nos restringimos à região onde $y = 0$. Nesse caso, devemos considerar $\int dy (dn/dy)$, em um intervalo de integração que reflita a região de rapidez onde haja dados. Nesse caso, a expressão para a média do espaço de fase, em vez daquela dada na Eq.(5.22), torna-se

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} \left\{ \int dy \frac{dN}{dy} \frac{1}{\cosh y} \right\} \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_0^{\infty} dq_T q_T [C_\Delta(q_T, q_l, K_T, K_L) - 1], \end{aligned}$$

com $E_K = \sqrt{K_l^2 + K_T^2 + m_\pi^2} = \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2} \cosh y$, pois $K_l = M_{K_T} \sinh y$. Vamos, então, analisar em separado as expressões de $\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle$ para cada um dos modelos discutidos anteriormente.

A média correspondente à distribuição gaussiana com pacotes de onda mínimo para a função de correlação, dada na Eq.(5.21), adquire a forma

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{\sqrt{\pi} e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_\pi T_f)}}{2R_{\Delta,T}^2 R_{\Delta,l} (P_T^2 + m_\pi T_f) \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dN}{dy} \right), \quad (5.33)$$

sendo $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + 1/4m_\pi T_f$ e $\Delta p = \sqrt{m_\pi T_f}$. Na expressão acima, consideramos que o espectro também pudesse ser escrito por uma distribuição gaussiana. No entanto, se considerarmos que apenas a distribuição espaço-temporal seja gaussiana mas que o espectro seria melhor descrito por uma exponencial, como sugerem os dados experimentais, então

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2R_{\Delta,T}^2 R_{\Delta,l} T_f^2 \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} e^{-K_T/T_f} \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dN}{dy} \right). \quad (5.34)$$

Tomando o limite $\Delta x \sim \Delta p \rightarrow 0$ para os casos acima, encontramos

$$\langle f(K_T) \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2R_T^2 R_l P_T^2 \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} e^{-K_T^2/2P_T^2} \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dN}{dy} \right), \quad (5.35)$$

$$\langle f(K_T) \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2R_T^2 R_l T_f^2 \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} e^{-K_T/T_f} \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dN}{dy} \right), \quad (5.36)$$

Vamos, por simplicidade, comparar inicialmente estas médias sem a inclusão do fator correspondente à integral em dy . Os resultados encontram-se na figura 5.5. Os raios transversal e longitudinal foram extraídos da ref. [20]: $R_T = 3.56$ fm e $R_l = 2.52$ fm. A figura mostra que a diferença é novamente muito pequena se compararmos as duas curvas mais baixas, correspondentes ao modelo gaussiano, com e sem os pacotes mínimos. Já a linha cheia corresponde a considerar a forma exponencial para o espectro ainda mantendo os pacotes mínimos no cálculo da função de correlação. Vemos que ela é muito próxima daquela que ignora os pacotes mas têm a mesma forma exponencial para o espectro. Vemos, porém, que os dois grupos de curvas estão muito afastados um do outro. Este comportamento pode ser explicado pelo fato da média nas Eqs.(5.33) a (5.35) ter maior sensibilidade ao espectro que à função de correlação refletindo o que observamos nas figuras 5.2 e 5.4. Em particular, no caso do espectro parametrizado por gaussiana, este também depende acentuadamente do valor adotado para a largura P_T , a qual foi aqui fixada em 500 MeV para ilustração.

Se quisermos ter uma idéia de ordem de grandeza do fator

$$I = \int dy \left(\frac{dN}{dy} \right) \frac{1}{\cosh y},$$

teremos que conhecer a forma de dN/dy . Na ref. [27], dados de distribuição de rapidez de pions são ajustados e parametrizados em função da massa transversal, temperatura e rapidez dessas partículas. O Apêndice F.1.1 contém a respectiva estimativa para a integral acima, para a qual obtivemos o valor $I \approx 22$. Ao ser introduzido nas Eqs.(5.33)-(5.35), ele elevará os pontos da figura 5.5, de modo que seu valor máximo ultrapasse a unidade. Esse, porém, deve ser considerado apenas como uma estimativa superior grosseira, já que a expressão de (dN/dy) discutida no apêndice F.1.1 foi obtida após considerar a contribuição integrada dos momentos transversais. Expressões de (dN/dy) como função de K_T não são usualmente obtidas experimentalmente.

Se compararmos agora o comportamento das curvas da Fig. 5.5 com aquele correspondente, por unidade de rapidez, mostrado na figura 4.1, veremos que as curvas mais altas são equivalentes àquela discutida com base na sugestão de Bertsch. Isto pode ser comprovado comparando as equações (4.10) com (5.35), tomando-as por unidade de rapidez. Então, conforme discussão feita anteriormente em relação à Fig. 5.3, ao eliminarmos a restrição do cálculo ao plano de rapidez central, obtemos o mesmo resultado que do capítulo 4

5.4 Modelo de Kolehmainen-Gyulassy

A limitação do formalismo gaussiano discutido nas seções precedentes acentua-se quando consideramos fontes não estáticas, como é o caso dos sistemas formados em colisões a altas energias, os quais normalmente se expandem antes da emissão de partículas (se considerarmos desprezível a emissão durante a expansão). Nesta segunda parte do trabalho vamos comparar o formalismo gaussiano discutido anteriormente, com um outro modelo, o qual considera hipóteses mais realistas, como por exemplo, a expansão da fonte. Vamos considerar que o sistema formado em colisões entre ions pesados a altas energias possa ser descrito pelo modelo de Bjorken, discutido em linhas gerais no Capítulo 2.

O modelo de Bjorken considera que as partículas sejam emitidas em um instante próprio $\tau = \tau_f$, isto é, quando o sistema se desacopla (o chamado “freeze-out”). Nesse caso, a distribuição de “freeze-out” pode ser descrita pela distribuição $g(x, \vec{p}) \propto \frac{dN}{dy_f} \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \delta^2(\vec{p}_T) \delta^2(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_f})$. Se, porém, considerarmos que a distribuição espacial ao longo da direção transversal possa ser suavizada por uma gaussiana, podemos escrever

$$g(x, \vec{p}) \propto \left\langle \frac{dN}{dy_f} \right\rangle \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \delta^2(\vec{p}_T) e^{-(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_f})^2 / 2R_T^2}. \quad (5.37)$$

A correspondente distribuição $D_{\Delta}(q, \vec{K})$ da Eq. (3.48), dentro do formalismo da ref. [7], pode ser expressa, nesse caso, na forma

$$D_{\Delta}(q, \vec{K}) \propto 2 \left\langle \frac{dN}{dy} \right\rangle K_0(z_{12}) e^{-R_T^2 \vec{q}_T^2 / 2} e^{(m_{\pi}^2 + K^{\mu} K_{\mu}) / 2 \Delta p^2} e^{q^{\mu} q_{\mu} \Delta x^2 / 2} \quad (5.38)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero. O argumento z_{12} tem a forma complexa

$$z_{12}^2 = \left[\frac{m_{\pi}}{2 \Delta p^2} (m_{T1} + m_{T2}) - i \tau_f (m_{T1} - m_{T2}) \right]^2 - 2 m_{T1} m_{T2} \left(\tau_f^2 + \frac{m_{\pi}^2}{4 \Delta p^4} \right) [1 - \cosh(y_1 - y_2)] \quad (5.39)$$

Se considerarmos $k_1 \equiv k_2$, o momento relativo se anula, isto é, $q = 0$, Nesse caso, obtemos a amplitude $D_{\Delta}(0, k_i)$, proporcional à distribuição de partícula única

$$D_{\Delta}(0, \vec{k}_i) \propto 2 \left\langle \frac{dN}{dy} \right\rangle K_0(z_i) e^{m_{\pi}^2 / \Delta p^2}, \quad (5.40)$$

onde

$$z_i = \frac{m_{Ti} m_{\pi}}{\Delta p^2}.$$

Com os resultado acima encontramos a seguinte expressão para a função de correlação*

$$C_{\Delta}(k_1, k_2) = 1 + \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1) K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2} e^{q^{\mu} q_{\mu} \Delta x^2} e^{(-m_{\pi}^2 + K^{\mu} K_{\mu}) / \Delta p^2} \quad (5.41)$$

A dependência dos argumentos z_{12} e z_i na massa transversal e na rapidez pode ser reescrita em termos do momento relativo e do momento médio do par na forma

$$z_{12}^2 = -\tau_f^2 \left((q^0)^2 - q_l^2 \right) + \frac{m_{\pi}^2}{\Delta p^4} \left((K^0)^2 - K_l^2 \right) - i \frac{2 m_{\pi} \tau_f}{\Delta p^2} K_T q_T \cos \phi. \quad (5.42)$$

e

$$z_{1,2} = \frac{m_{\pi}}{\Delta p^2} \sqrt{m_{\pi}^2 + \left(\vec{K}_T \pm \frac{1}{2} \vec{q}_T \right)^2} \quad (5.43)$$

Utilizando as identidades

$$\begin{cases} K^2 + \frac{1}{4} q^2 & = m_{\pi}^2 \\ K^0 q^0 & = \vec{K} \cdot \vec{q} \end{cases}$$

*No apêndice E mostraremos com mais detalhes a obtenção da função de correlação Eq.(5.41).

encontramos que

$$\begin{cases} (q^0)^2 = 2 \left\{ \left(m_\pi^2 + \vec{K}^2 + \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) - \sqrt{\left(m_\pi^2 + \vec{K}^2 + \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right)^2 - (\vec{K} \cdot \vec{q})^2} \right\} \\ (K^0)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(m_\pi^2 + \vec{K}^2 + \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right) + \sqrt{\left(m_\pi^2 + \vec{K}^2 + \frac{1}{4} \vec{q}^2 \right)^2 - (\vec{K} \cdot \vec{q})^2} \right\} \end{cases} \quad (5.44)$$

A função de correlação (5.41) tem a característica de não ser uma parametrização gaussiana, e nela ainda estão contidas naturalmente os pacotes de onda e a expansão do sistema, vinda da distribuição de desacoplamento (“freeze-out”) do modelo de Bjorken.

5.4.1 Incerteza mínima

Utilizando a relação de incerteza mínima, isto é, $\Delta x \Delta p = 1/2$ (lembrando que consideramos $\hbar = c = 1$) e considerando $\Delta p^2 \approx m_\pi T_f$ [7], como na sub-seção 5.2.1, a função de correlação (5.41) se simplifica, tornando-se

$$C_\Delta(\vec{q}, \vec{K}) = 1 + \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2} \quad (5.45)$$

Os argumentos das funções de Bessel ficam então como:

$$z_{12}^2 = -\tau_f^2 \left((q^0)^2 - q_l^2 \right) + \frac{1}{T_f^2} \left((K^0)^2 - K_l^2 \right) - i \frac{2\tau_f}{T_f} K_T q_T \cos \phi. \quad (5.46)$$

com $(q^0)^2$ e $(K^0)^2$ definidas na eq. (5.44), e

$$z_{1,2} = \frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4} q_T^2 \pm K_T q_T \cos \phi} \quad (5.47)$$

O resultado (5.45) coincide com aquele obtido por Kolehmainen-Gyulassy[26, 28], a menos do raio transversal R_T . Para compatibilizar os dois resultados, teríamos que considerar $R_T = \sqrt{2} R_{TKG}$. Por simplicidade, faremos referência a este modelo e à Eq.(5.45) pelas iniciais dos autores (KG). Esta função de correlação será comparada com a gaussiana da equação (5.21), ou seja, com

$$C_\Delta(q_T, K_T) = 1 + e^{-R_{\Delta,T}^2 q_T^2 - R_{\Delta,i}^2 q_i^2} \quad (5.48)$$

onde $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + 1/4 m_\pi T_f$. A temperatura considerada é de $T_f = 170$ MeV, e a largura da fonte, $P_T = 500$ MeV; a massa do pion $m_\pi = 140$ MeV, e o momento transversal $K_T = 200$ MeV.

Os parâmetros de raio e tempo-próprio R_T , R_i e τ , foram obtidos pela mesma experiência [20] ajustando os dados através da função de correlação dada por

$$C(q^0, q_T, q_l) = 1 + e^{-q^{0^2} \tau^2 - R_T^2 q_T^2 - R_i^2 q_i^2} \quad (5.49)$$

Os valores obtidos com a parametrização acima foram $\tilde{R}_T \simeq (3.15 \pm 0.15)$ fm, $\tilde{R}_l \simeq (2.57 \pm 0.15)$ fm e $\tau \simeq (2.78 \pm 0.21)$ fm. Vemos que \tilde{R}_T é ligeiramente menor que R_T obtido ajustando os mesmos dados através da Eq.(5.19). Este resultado reflete a bem conhecida [7] influência do tempo no parâmetro efetivo de raio, através da dependência em $q^0 \approx \vec{q} \cdot \vec{K} / \sqrt{\vec{K}^2 + m_\pi^2}$. Isto quer dizer que R_T corresponde a um valor efetivo do parâmetro de raio transversal, no qual o tempo de emissão está indiretamente sendo levado em conta, aumentando-o em relação a \tilde{R}_T (conforme citado anteriormente, os valores $\tilde{R}_T = (3.56 \pm 0.13)$ fm e $\tilde{R}_l = (2.52 \pm 0.18)$ fm foram obtidos pela mesma experiência). A rigor, os parâmetros que deveríamos adotar seriam R_T , R_l e τ obtidos pelo ajuste com a Eq.(5.49). No entanto, o valor de R_l é praticamente o mesmo nos dois tipos de ajuste. A parte transversal tem importância secundária no presente estudo, pois estamos desprezando a expansão transversal. Ainda assim, a diferença entre \tilde{R}_T e R_T é pouco maior que 10% apenas. Dessa forma, resolvemos adotar os mesmos valores de R_T e R_l que os das seções precedentes, isto é, $R_T \simeq 3.56$ fm, $R_l \simeq 2.52$ fm, mantendo $\tau \simeq 2.78$ fm na Eq.(5.46). Na figura 5.6 estes gráficos são exibidos; estamos considerando também que dispomos de estatística ilimitada nos momentos relativos, ou seja, que possamos considerar $q_l = 0$ para fazer o gráfico de $C_\Delta(q_T) \times q_T$ e, analogamente, podemos considerar $q_T = 0$ para fazer o gráfico de $C_\Delta(q_l) \times q_l$. Observamos neste último caso desvio um pouco mais significativo da função de correlação de KG em relação às gaussianas com ou sem pacotes, para $q_l \gtrsim 0.05$ GeV, refletindo os efeitos da expansão longitudinal da fonte. A largura da curva, porém, diminui no modelo KG em relação ao gaussiano com pacotes. Isto se deve ao fato da expansão da fonte limitar as regiões longitudinais acessíveis à interferometria. Já no caso de $C(q_T) \times q_T$ ($q_l = 0$), porém, a função de correlação poderia apresentar dependência em ϕ , de acordo com a Eq.(5.41). De fato, isto pode ser visto na Fig. 5.6: a curva correspondente a KG com $\phi = 0$ é a mais estreita e aquela correspondente a $\phi = \pi/2$, coincide com a do modelo gaussiano sem pacotes (veja a Eq.(5.55) mais à frente). Na direção longitudinal a dependência no ângulo ϕ de $C(q_l) \times q_l$, não é observada pelo fato de considerar $q_T = 0$, já que tal ângulo está diretamente associado com os momentos transversais médio e relativo.

5.5 Regiões cinemáticas

O modelo de Bjorken considera que, ao atingir o “freeze-out” o sistema tenha se expandido ao longo de um “tubo” infinito. Dado que o problema que estamos considerando possui simetria cilíndrica, os vetores correspondentes ao momento relativo e ao momento médio podem ser mais convenientemente decompostos seguindo

as componentes

$$\begin{cases} \vec{q} &= q_T \hat{\rho} + q_l \hat{z}, \\ \vec{K} &= K_T \hat{\rho} + K_l \hat{z}. \end{cases}$$

Desse modo, o correlator será uma função $C = C(q_l, q_T, K_l, K_T, \phi)$, onde ϕ é o ângulo entre a direção de \vec{q}_T e \vec{K}_T . Por definição, a componente conhecida como “out” (de “outwards”), é aquela em que $\vec{q}_T \parallel \vec{K}_T$. A componente “side” (de “sideways”) é ortogonal a esta, correspondendo ao caso em que $\vec{q}_T \perp \vec{K}_T$. O ângulo ϕ acima guarda, então, a seguinte relação com os ângulos ϕ_{K_T} (ângulo azimutal de \vec{K}_T) e ϕ_{q_T} (ângulo azimutal de \vec{q}_T),

$$\phi = |\phi_{K_T} - \phi_{q_T}|$$

Devido à simetria do problema, \vec{K}_T pode ter qualquer direção no plano transversal; vamos fixar sua direção seguindo o eixo “ x ”, de modo que

$$\vec{K}_T = K_T \hat{x}.$$

Dessa forma, é imediato ver que $\phi = \phi_{q_T}$.

Com as considerações acima, podemos calcular, então, a média da densidade de espaço de fase, $\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle$, para este modelo. Para isso, como fizemos no caso das gaussianas, dividiremos o problema em duas regiões, a primeira fixando $y = (y_1 + y_2)/2 = 0$, e a segunda correspondente a $y \neq 0$.

5.6 Densidade média do espaço de fase na região central de rapidez

Tínhamos visto anteriormente que a componente longitudinal dos momentos deixa de contribuir nesta região, pois é escrita em termos da rapidez por $k_l = m_\pi \sinh y$. Vimos também que por causa destas considerações a função de correlação passava a depender apenas dos momentos transversais e do ângulo entre o momento relativo e o momento médio. No presente caso incluímos explicitamente a dependência no ângulo entre os momentos transversais na função de correlação $C_\Delta = C_\Delta(q_T, K_T, \phi)$. Esta, expressa pela Eq.(5.45), contém funções de Bessel modificadas de ordem zero, cujos argumentos, especificados nas Eqs.(5.46) e (5.47), podendo ser reescritos, na região central de rapidez, como

$$z_{12}^2 = -\tau_f^2 (q^0)^2 + \frac{1}{T_f^2} (K^0)^2 - i \frac{2\tau_f}{T_f} K_T q_T \cos \phi, \quad (5.50)$$

com $(q^0)^2$ e $(K^0)^2$ definidas na eq. (5.44), e

$$z_{1,2} = \frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4}q_T^2 \pm K_T q_T \cos \phi}. \quad (5.51)$$

O cálculo da média que utilizaremos para esse caso será aquele dado na Eq.(5.23), e seguirá o mesmo procedimento discutido anteriormente. Devemos lembrar ainda que estamos considerando-a em unidades de $dn/dy|_{y=0}$, a qual, no modelo de Bjorken é uma constante, já que a distribuição de rapidez forma um platô na região central. Assim, temos

$$\langle f(\vec{K}_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = 2 \frac{dn}{2\pi K_T dK_T} \Big|_{\Delta} \int_0^\infty dq_T q_T \int_0^{2\pi} d\phi [C_\Delta(q_T, K_T, \phi) - 1],$$

onde $\phi = \phi_{q_T}$ foi discutido na seção precedente.

Neste ponto podemos tomar dois casos muito particulares: primeiro, quando os momentos transversais forem paralelos, e segundo, quando eles forem perpendiculares entre si.

5.6.1 Momentos transversais paralelos: $\vec{K}_T \parallel \vec{q}_T : (\phi = 0)$

Para este caso particular devido à simetria azimutal do problema, escolhemos o momentum médio transversal de modo a coincidir com o eixo x . A integração da função de correlação em $d\phi$ resultará em um fator 2π . Assim, a média de $f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x)$ será dada por

$$\langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = 2 \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_{\Delta} \int_0^\infty dq_T q_T \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2}. \quad (5.52)$$

Os argumentos z_{12} e z_i são dados por

$$z_{12}^2 = -\tau_f^2 (q^0)^2 + \frac{1}{T_f^2} (K^0)^2 - i \frac{2\tau_f}{T_f} K_T q_T,$$

e

$$z_{1,2} = \frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + \left(K_T \pm \frac{1}{2}q_T\right)^2},$$

onde as componentes temporais dos momentos relativo e médio são, respectivamente,

$$(q^0)^2 = 2 \left\{ \left(m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4}q_T^2\right) - \sqrt{\left(m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4}q_T^2\right)^2 - K_T^2 q_T^2} \right\},$$

e

$$(K^0)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4} q_T^2 \right) + \sqrt{\left(m_\pi^2 + K_T^2 + \frac{1}{4} q_T^2 \right)^2 - K_T^2 q_T^2} \right\}.$$

Vemos, porém, que para a determinação de $\langle f \rangle$, necessitamos estabelecer a forma funcional do espectro transversal na Eq.(5.52), o que discutiremos a seguir.

5.6.2 Análise dos espectros

O espectro de partícula única neste modelo é dado pela Eq.(5.40). Assim, considerando $\Delta p^2 = m_\pi T_f$, a distribuição espectral será ficar

$$\frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta \propto K_0(z_i) e^{-m_\pi/T_f}.$$

Normalizando-a à unidade, teremos

$$\frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta = \frac{1}{m_\pi T_f K_1(m_\pi/T_f)} K_0\left(\frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2}\right) \quad (5.53)$$

o que coincide com o resultado obtido por Kolehmainen-Gyulassy [28]. O gráfico correspondente, em escala logarítmica, pode ser visto na figura 5.7. Observamos que a expressão (5.53) resulta em uma curva muito próxima daquela obtida pelos parâmetros do ajuste experimental, na forma de uma exponencial.

Neste ponto queremos ressaltar que, se compararmos os espectros correspondentes ao modelo gaussiano com o correspondente ao modelo K-G e ainda com a curva sugerida pelo ajuste experimental, em escala logarítmica, mostrados na Fig. 5.8, observaremos que o primeiro situa-se muito abaixo dos demais. Isto é uma indicação de que tal parametrização não seria adequada para tratar fontes em expansão, dado a sua discrepância frente à curvas cujo comportamento global fica mais próximo daquele dos dados em geral. O modelo K-G, porém, parece mais confiável na sondagem interferométrica da região de emissão já que ela assume critérios mais realistas, parecendo que, mesmo o espectro dele originado, situa-se mais próximo do comportamento sugerido pelos parâmetros ajustados através dos dados experimentais. Outro ponto a notar é que os espectros estão normalizados à unidade, em vez de serem em relação ao número de partículas, razão pela qual obtemos valores baixos para o máximo das curvas de $\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle \times K_T$, como é visto nas figuras 5.3, 5.5, e posteriormente nas figuras 5.9 e 5.11. Com a adequada normalização, porém, esperamos que as curvas se desloquem para valores maiores.

5.6.3 $f(K_T; \Delta p, \Delta x)$ média

Com o espectro acima, a média (5.52) se escreve como

$$\begin{aligned} \langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} &= \frac{2}{m_\pi T_f K_1(m_\pi/T_f)} K_0\left(\frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty dq_T q_T \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

cujo comportamento em função de K_T pode ser visto na figura 5.9. Conforme discutido anteriormente na seção 5.2.5, se compararmos o resultado da Fig. 5.9 com os das referências [24, 25], veremos que as curvas aqui apresentadas correspondem, para um mesmo K_T , a valores muito menores do que aqueles ali exibidos. As razões para esta aparente discrepância são várias; o espectro foi, por simplicidade, normalizado à unidade, consideramos apenas transversal correspondente à região central de rapidez ($y = 0$) e, além disso, não multiplicamos pelo número de partículas fornecido por dN/dy em $y = 0$.

5.6.4 Momentos transversais perpendiculares: $\vec{K}_T \perp \vec{q}_T : (\phi = \pi/2)$

No caso particular em que \vec{K}_T e \vec{q}_T são ortogonais (o que define a chamada direção “side”, de “sideways”), os argumentos (5.42) e (5.43) da função de Bessel modificada de ordem zero igualam-se todos, isto é, $z_{12} = z_1 = z_2$. Sendo assim, a função de correlação correspondente torna-se apenas

$$C_\Delta(q_T) = C(q_T) = 1 + e^{-R_T^2 q_T^2}. \quad (5.55)$$

Desse modo, a média de $f(r_T, K_T; \Delta p, \Delta x)$ torna-se facilmente integrável, resultando em

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = \frac{1}{m_\pi R_T^2 T_f K_1(m_\pi/T_f)} K_0\left(\frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2}\right) \quad (5.56)$$

sendo o espectro o mesmo da sub-seção 5.6.2.

Comparamos também as expressões (5.54) e (5.56) com a média correspondente ao formalismo gaussiano, a qual é dada na Eq.(5.29), ou seja,

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_{\Delta,T}^2 (P_T^2 + m_\pi T_f)} e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_\pi T_f)}, \quad (5.57)$$

e também com aquela dada na Eq.(5.30), a qual corresponde a considerar o espectro sugerido pelo ajuste experimental,

$$\langle f(K_T) \rangle_{y=0} = \frac{1}{R_T^2 T_f} e^{-K_T/T_f}. \quad (5.58)$$

Na figura 5.9 estão esboçados os resultados correspondentes a esses dois formalismos. Podemos notar que o modelo K-G apresenta curva muito próxima daquela obtida com o auxílio da Eq.(5.58) acima.

5.7 Densidade média de espaço de fase na região em que $y \neq 0$

Tal qual na seção 5.3, notamos que, quando, $y \neq 0$, K_l e q_l não se anulam. A função de correlação, dada em (5.45), dependerá, então, das componentes transversal e longitudinal do momento relativo, do momento médio, e do ângulo entre os momentos transversais: $C_\Delta = C_\Delta(q_T, q_l, K_T, K_l, \phi)$.

$$C_\Delta(\vec{q}, \vec{K}) = 1 + \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2}. \quad (5.59)$$

Esta função de correlação, juntamente com aquela correspondente ao formalismo gaussiano acrescido dos pacotes de onda da Eq.(5.21), isto é,

$$C_\Delta(q_T, q_l, K_T) = 1 + e^{-R_{\Delta,r}^2 q_T^2 - R_{\Delta,l}^2 q_l^2}, \quad (5.60)$$

estão representados graficamente na figura 5.10. Analogamente à seção 5.3, consideramos que os momentos relativos refitam aqueles, sendo distribuídos em intervalos finitos (“bins”), limitados em uma faixa de $15 < q_T < 25$ e $15 < q_l < 25$ MeV [20]. Isto ilustra o fato de que, experimentalmente, dispomos de estatística finita na obtenção dos dados. No gráfico vemos a proximidade das curvas de correlação de forma muito similar aos comportamentos exibidos na Fig. 5.6.

Analogamente ao discutido na subseção 5.3.1, observamos que, para estimar a média da densidade do espaço de fase, devemos incluir uma contribuição relacionada à distribuição de rapidez (dn/dy). No modelo de Bjorken, esta é considerada praticamente constante. De qualquer forma, devemos indicar a integração sobre o intervalo de rapidez considerado. A expressão da média será então,

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{K}; \Delta p, \Delta x) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\vec{K}_T^2 + m_\pi^2}} \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dn}{dy} \right) \frac{dn}{2\pi K_T dK_T} \Big|_\Delta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_0^{\infty} dq_T q_T \int_0^{2\pi} d(\phi_{q_T} = \phi) [C_\Delta(q_T, q_L, K_T, K_L, \phi) - 1], \end{aligned} \quad (5.61)$$

sendo $E_K = \sqrt{K_T^2 + K_l^2 + m_\pi^2} = (\vec{K}_T^2 + m_\pi^2)^{1/2} \cosh y$. Vemos que agora a componente dq_l é agora integrada, já que y pode ser qualquer.

O espectro que usaremos será o mesmo da sub-seção 5.6.2. Como no caso de $y = 0$, vamos considerar dois casos particulares, o primeiro quando o ângulo ϕ entre os momentos transversais for zero ($\vec{K}_T \parallel \vec{q}_T$), e segundo, quando $\phi = \pi/2$ ($\vec{K}_T \perp \vec{q}_T$). Para estes dois casos, a média a calcular será

$$\begin{aligned} \langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle &= \frac{1}{m_\pi T_f K_1(m_\pi/T_f)} \frac{K_0(\frac{1}{T_f} \sqrt{m_\pi^2 + K_T^2})}{\sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} \times \\ &\times \left(\frac{dn}{dy} \right) \text{arcth}[\sinh y] \int dq_T dq_l q_T \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 q_T^2} \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde (dn/dy) agora fornece a altura do platô.

A integração no momento transversal deveria se estender desde zero até o infinito, $0 < q_T < \infty$ e, no momento longitudinal, $-\infty < q_l < \infty$. Verificamos, porém, que numericamente esses intervalos podem ser cortados muito antes, já dentro de uma faixa de integração de -0.3 até 0.3 GeV para o momento longitudinal, e para o momento transversal em uma faixa de 0 até 0.3 GeV. Nessas faixas, a convergência das integrais já é muito boa.

Na figura 5.11 estão representados as médias, sem o fator multiplicativo $\left(\frac{dn}{dy}\right) \text{arcth}[\sinh y]$, correspondentes ao modelo K-G, ao formalismo gaussiano acrescido dos pacotes de onda, dada na Eq.(5.33)

$$\langle f(K_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{\sqrt{\pi} e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_\pi T_f)}}{2R_{\Delta,T}^2 R_{\Delta,l} (P_T^2 + m_\pi T_f) \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} \left(\frac{dn}{dy} \right) \text{arcth}[\sinh y],$$

onde $R_{\Delta,i}^2 = R_i^2 + P_i^2/4m_\pi T_f (P_i^2 + m_\pi T_f)$, e à correspondente ao ajuste experimental da Eq.(5.36),

$$\langle f(K_T) \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2R_T^2 R_l T_f^2 \sqrt{K_T^2 + m_\pi^2}} e^{-K_T/T_f}.$$

Nela notamos novamente a proximidade do resultado baseado no modelo K-G com aquele que reflete ajuste experimental, estando ambos muito distantes da curva correspondente ao modelo gaussiano. As pequenas diferenças neste gráfico talvez pudessem ser ignoradas se pudessemos levar em conta a barra de erro dos dados experimentais.

Para ter uma idéia da ordem de grandeza do fatoro $\left(\frac{dn}{dy}\right) \text{arcth}[\sinh y]$, poderíamos tentar estimá-lo com base em informação experimental. Contudo, não podemos comparar com os valores usados na discussão da subseção 5.3.1, pois, estes dados estão muito distantes de ser considerado um platô (ver apêndice F.1.2). Preferimos, então, deixar esse fator apenas indicado.

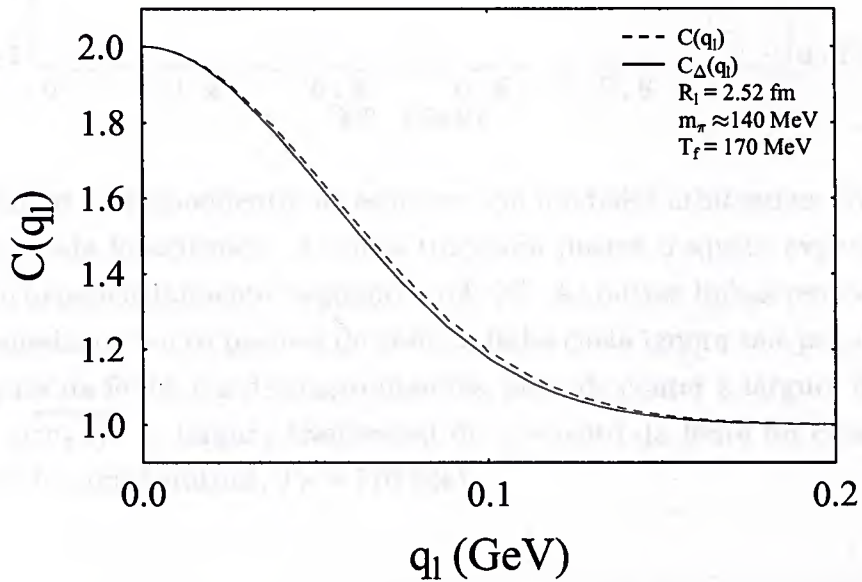
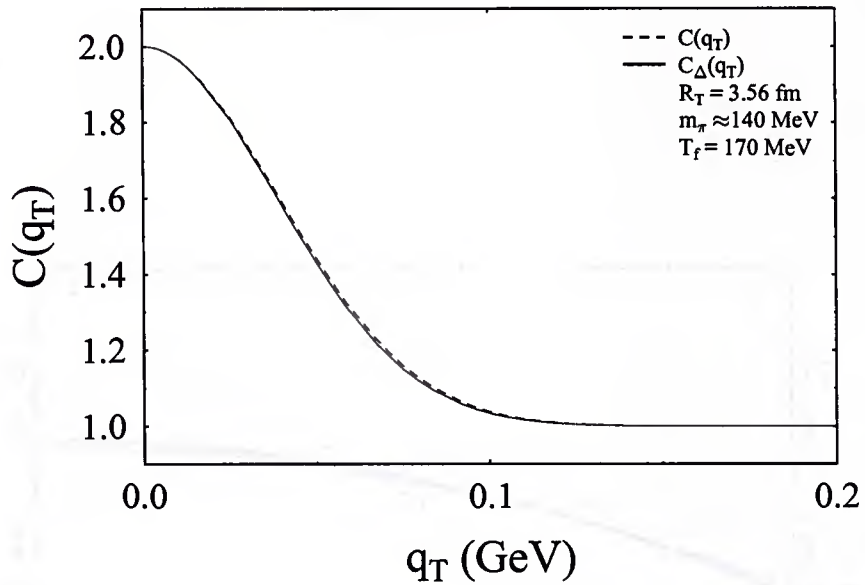


Figura 5.1: Representação da função de correlação versus a parte transversal e longitudinal do momento relativo, respectivamente. As linhas tracejadas correspondem à parametrização utilizada por Bertsch [6], dada na Eq.(5.20), enquanto as cheias, correspondente à parametrização gaussiana com a introdução dos pacotes de onda e incerteza mínima, sendo $\Delta p \approx \sqrt{m_{\pi} T_f}$, dada na Eq.(5.21). O raio transversal foi obtido da ref. [20], $R_T = 3.56 \text{ fm}$, e a temperatura foi estimada em $T_f = 170 \text{ MeV}$.

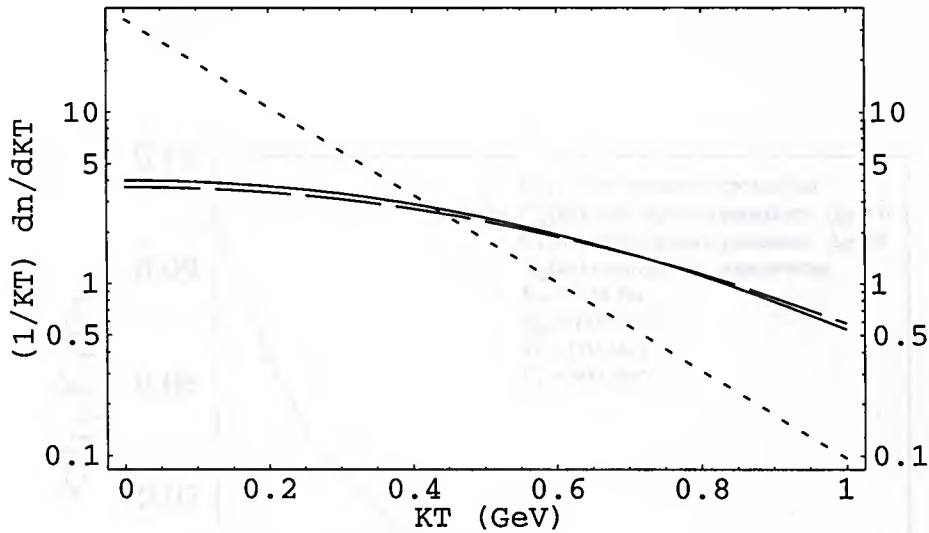


Figura 5.2: Curvas correspondentes ao espectro, em unidades arbitrárias, no modelo gaussiano em escala logarítmica. A curva tracejada ilustra o ajuste experimental, parametrizado exponencialmente, segundo a ref. [6]. As outras linhas reproduzem o formalismo gaussiano com os pacotes de onda; a linha cheia ignora tais pacotes, mas contém a largura da fonte, e a de traços maiores, além de conter a largura da fonte, utiliza $\Delta p \approx \sqrt{m_\pi T_f}$. A largura transversal de momento da fonte foi considerada $P_T = 500$ MeV e a temperatura, $T_f = 170$ MeV.

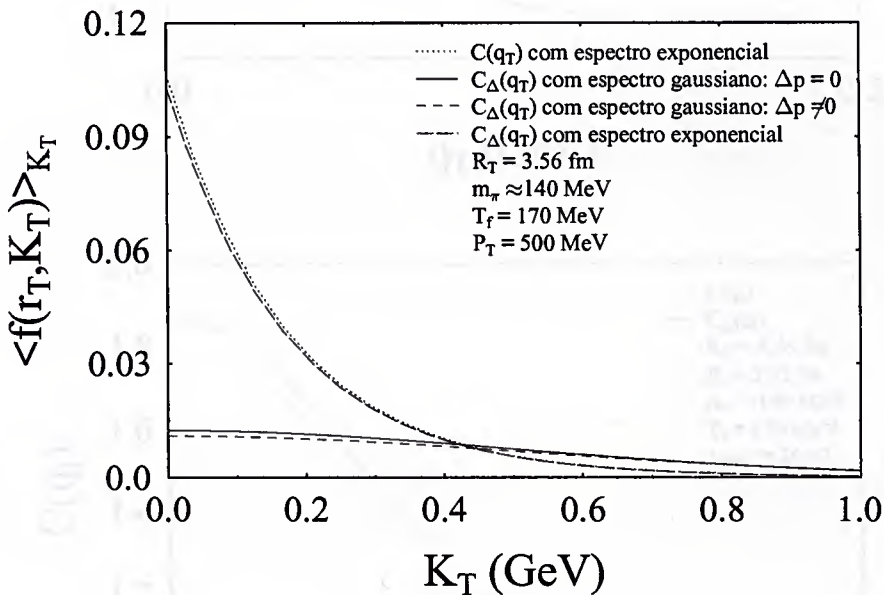


Figura 5.3: Comparação das médias de $f(r_T, K_T)$ versus K_T , em unidades da integral de (dn/dy) , restritas ao plano transversal correspondente à região central de rapidez ($y = 0$). A linha pontilhada corresponde à curva gerada com os parâmetros inspirados no ajuste experimental, dado pela Eq.(5.32), considerando uma forma exponencial para o espectro. A linha de traços maiores refere-se ao modelo gaussiano com pacotes de onda, porém, com o mesmo espectro. As curvas mais baixas representam o formalismo gaussiano. A de traços menores ignora os pacotes de onda, mas contém a largura da fonte. A curva contínua inclui tanto, a largura da fonte quanto os pacotes de onda, com $\Delta p \approx \sqrt{m_\pi T_f}$. Para a largura da fonte adotamos o valor de $P_T = 500$ MeV e para a temperatura, $T_f = 170$ MeV [7]. O raio transversal foi obtido da ref. [20].

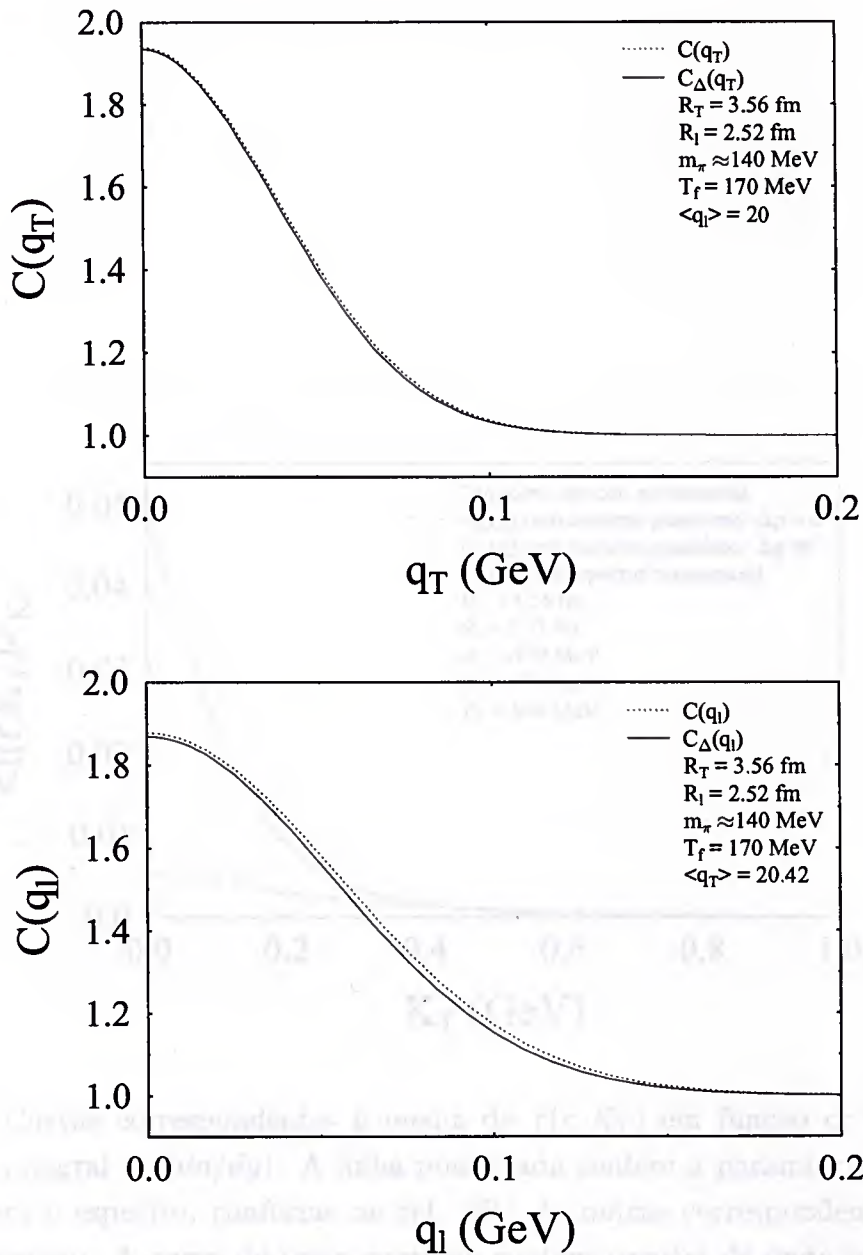


Figura 5.4: Curvas da função de correlação correspondentes ao formalismo gaussiano. A linha pontilhada representa a parametrização da ref. [6], dada na Eq.(5.20), e a cheia àquela que contém os pacotes de onda. Foi adotado uma estatística finita no momentum relativo para ambas as direções, transversal e longitudinal. Nos dois casos o “bin” está em uma faixa de $15 < q_T < 25$ MeV e $15 < q_l < 25$ MeV, sendo $\langle q_T \rangle = 20.42$ e $\langle q_l \rangle = 20$. A temperatura T_f foi estimada em $T_f = 170$ MeV em base na ref. [7]. Os raios foram extraídos da ref. [20].

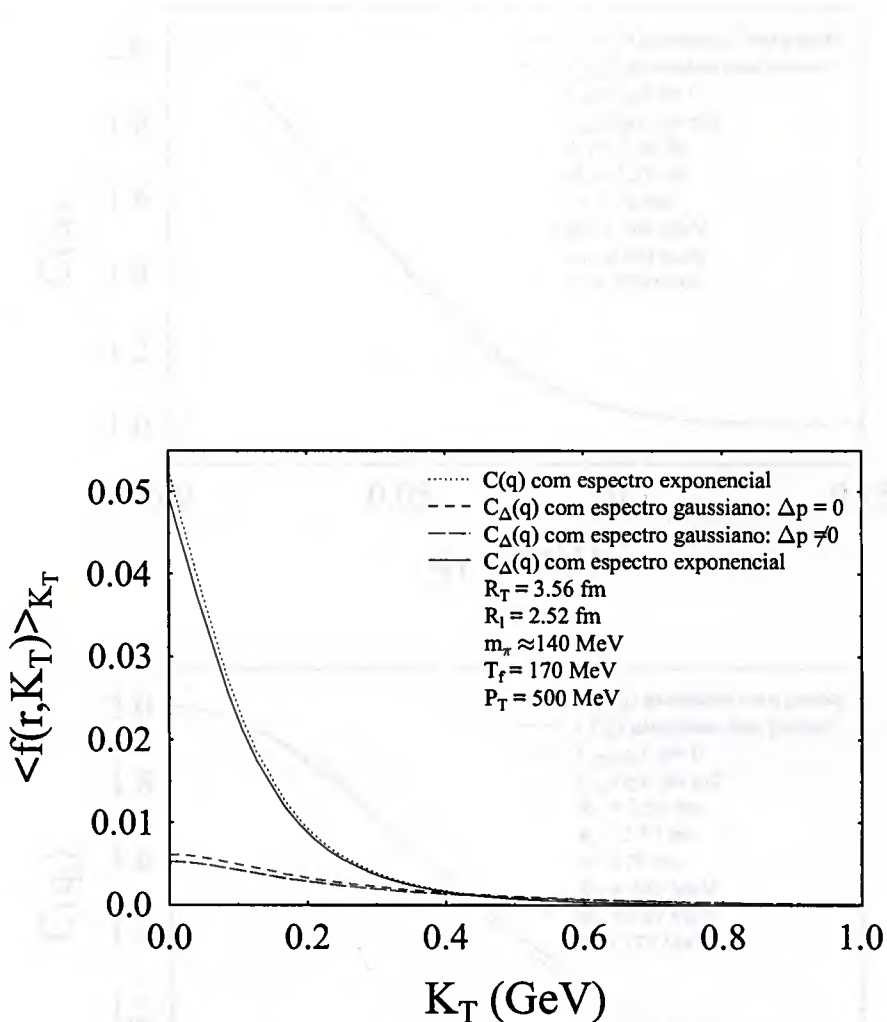


Figura 5.5: Curvas correspondentes à média de $f(r, K_T)$ em função de K_T , em unidades da integral de (dn/dy) . A linha pontilhada contém a parametrização exponencial para o espectro, conforme na ref. [6]. As outras correspondem ao formalismo gaussiano. A curva de traço contínuo contém pacotes de onda na função de correlação, porém, para o espectro, foi considerado aquele próximo ao do ajuste experimental da ref. [6]. As curvas mais baixas correspondem a um espectro gaussiano, com largura de fonte estimada em $P_T = 500$ MeV. A de traço maior ignora os pacotes de onda, enquanto que a de traço menor, além de levar em conta a largura da fonte, contém os pacotes de onda, com $\Delta p \approx \sqrt{m_{\pi} T_f}$, sendo T_f extraída da ref. [7] e os raios, da ref. [20].

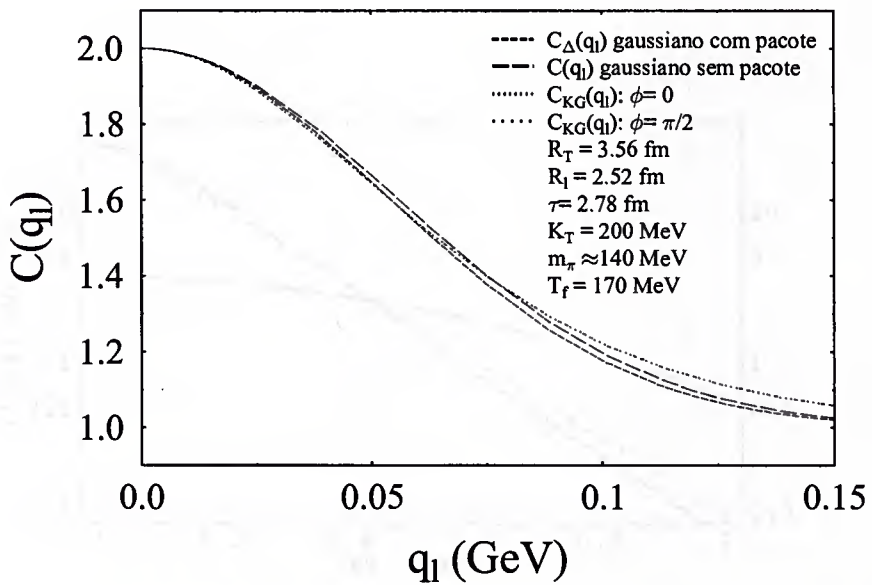
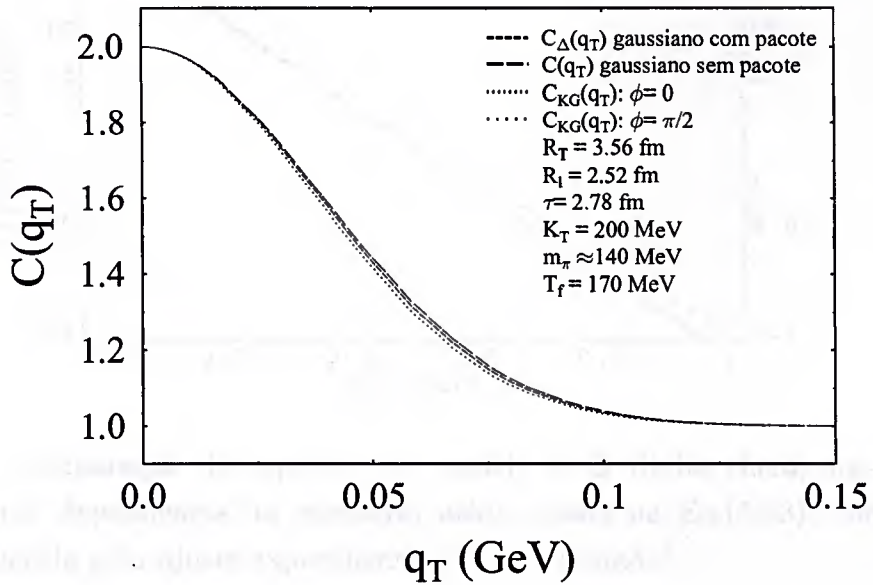


Figura 5.6: Curvas da função de correlação versus q_T e versus q_l . As linhas tracejadas correspondem ao formalismo gaussiano e as pontilhadas ao modelo K-G. O cálculo supõe que poderíamos dispor de estatística ilimitada, ou seja, que deveríamos tomar $q_T = 0$ para estimar $C(q_l) \times q_l$ e $q_l = 0$ para calcular $C(q_T) \times q_T$. O valor adotado para a temperatura foi de $T_f = 170$ MeV [7]; o momento médio transversal foi fixado em $K_T = 200$ MeV. Os parâmetros de raio e de tempo-próprio foram extraídos da ref. [20].

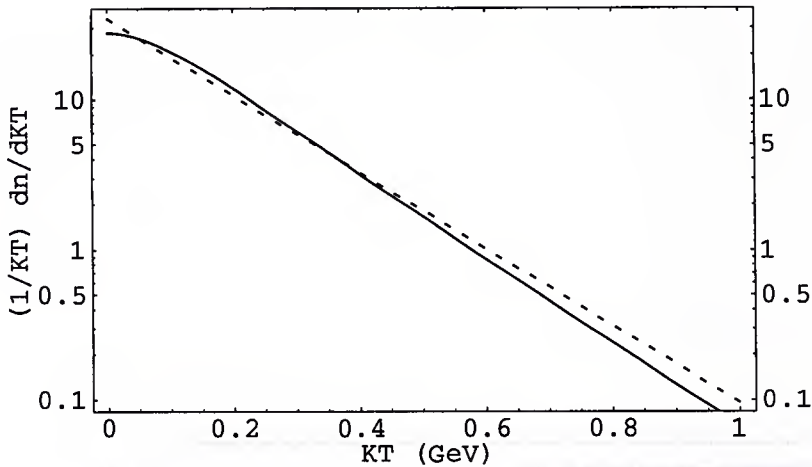


Figura 5.7: Comparação do espectro do modelo K-G (linha cheia) na direção transversal com dependência no momento médio, dada na Eq.(5.53), com a exponencial sugerida pelo ajuste experimental (linha tracejada).

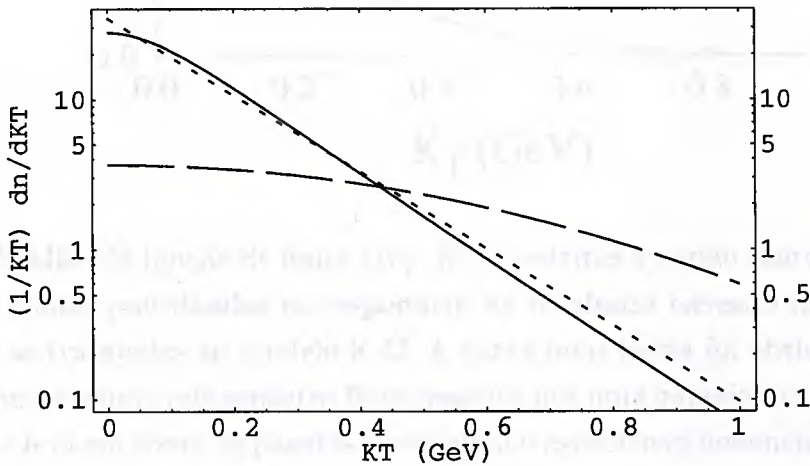


Figura 5.8: Comparação, em escala logarítmica das distribuições espectrais. A linha de traços menores corresponde à curva sugerida pelo ajuste experimental, dada pela Eq.(4.7). A curva com traços maiores corresponde ao modelo gaussiano para as distribuições de momento, conforme a Eq.(5.26). A linha cheia corresponde ao modelo de Kolehmainen-Gyulassy, dado pela Eq.(5.53).

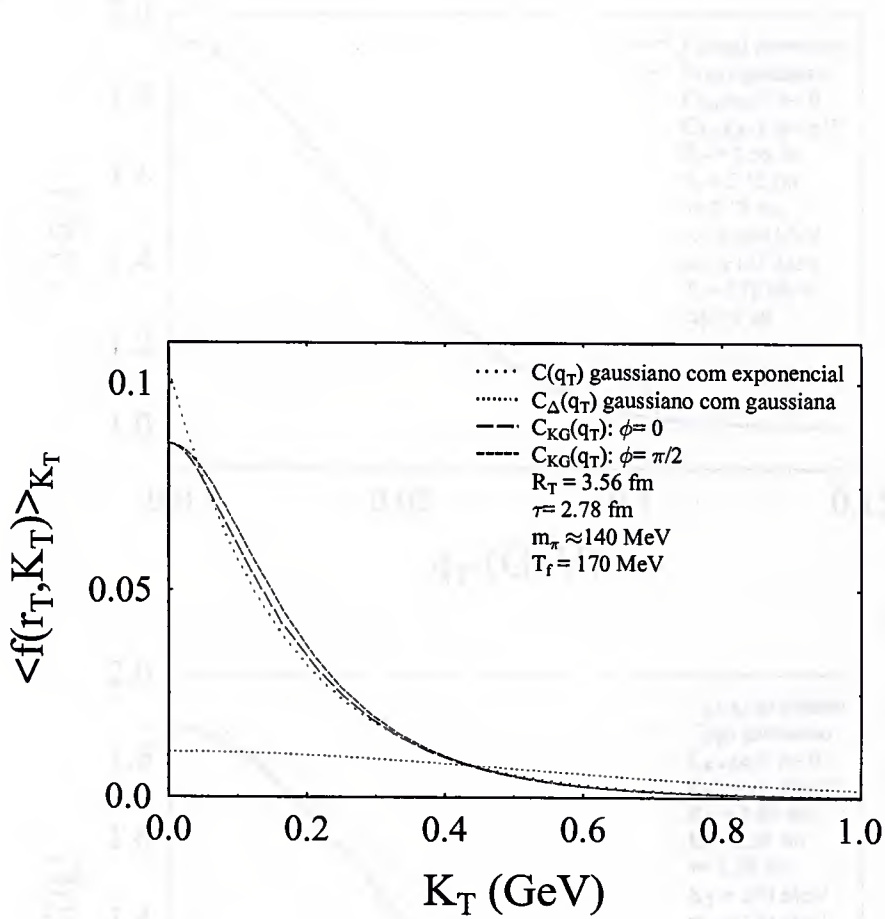


Figura 5.9: Médias da função de fonte $f(r_T, K_T)$, restritas à região central de rapidez ($y = 0$). As linhas pontilhadas correspondem ao resultado baseado no formalismo gaussiano, e as tracejadas ao modelo K-G. A curva mais baixa foi obtida através da Eq.(5.57), considerando que espectro fosse descrito por uma gaussiana. A pontilhada mais alta não leva em conta os pacotes e considera o espectro exponencial (Eq.(5.58))

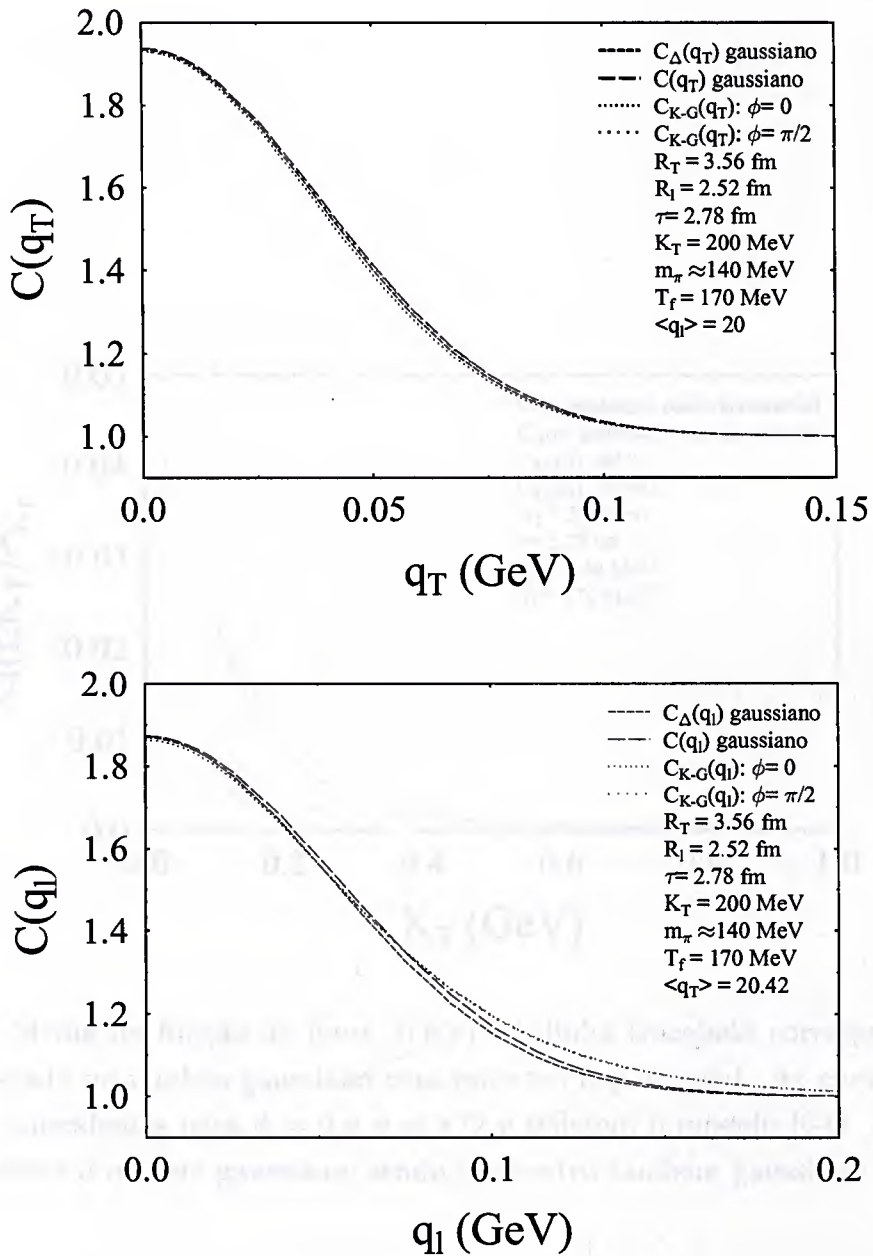


Figura 5.10: Função de correlação considerando que estatística seja finita, refletindo a projeção de função de correlação em q_T e q_l , porém, projetando apenas o primeiro “bin”, isto é, para $C(q_l) \times q_l$ fixamos $\langle q_T \rangle = 20.42$ e para $C(q_T) \times q_T$, fixamos $\langle q_l \rangle = 20$. As linhas tracejadas correspondem ao resultado baseado no formalismo gaussiano, e as pontilhadas, ao do modelo K-G.

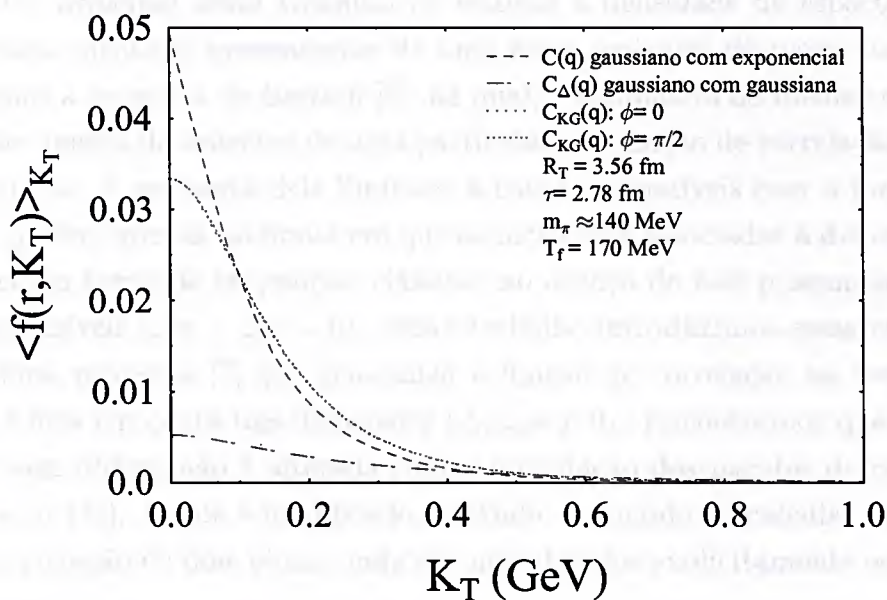


Figura 5.11: Média da função de fonte $f(K_T)$. A linha tracejada corresponde ao resultado baseado no modelo gaussiano com espectro exponencial. As curvas pontilhadas são coincidentes para $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$ e refletem o modelo K-G. A curva mais baixa reflete o modelo gaussiano, sendo o espectro também gaussiano.

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo principal deste trabalho foi estimar a densidade de espaço de fase média de pions idênticos provenientes de uma fonte emissora de partículas. Para isso estudamos a proposta de Bertsch [6], na qual, a estimativa da média tem como base o conhecimento do espectro de uma partícula e da função de correlação de dois bosons idênticos. A proposta dele limita-se a casos compatíveis com o formalismo de Wigner, porém, apenas no limite em que as incertezas associadas à dispersão das coordenadas em torno de trajetórias clássicas no espaço de fase possam ser consideradas desprezíveis ($\Delta x \sim \Delta p \sim 0$). Neste trabalho introduzimos essas incertezas utilizando uma proposta [7] que generaliza a função de correlação na formulação de Wigner e leva em conta tais dispersões ($\Delta x \Delta p \neq 0$). Encontramos que a forma de estimar esta última não é alterada com a introdução dos pacotes de onda (ver Eqs. (4.5) e (5.11)). O que é modificado, contudo, é o modo de calcular espectro e função de correlação de dois pions, onde são introduzidos explicitamente os pacotes de onda.

Para ilustrar o resultado da densidade média do espaço de fase consideramos primeiramente o caso de uma fonte estática, onde as distribuições não relativísticas de momentos e a espaço-temporal eram completamente desacopladas. Nesse caso, utilizando formalismo da ref. [7] obtivemos uma função de correlação também gaussiana, porém, na qual as dispersões representados pelos pacotes de onda eram levadas em conta. Comparamos, então, as curvas de correlação correspondentes à parametrização gaussiana para os casos com e sem a introdução dos pacotes de onda mínimos. Na figura 5.1 consideramos o caso hipotético em que uma estatística ilimitada de momentos seria possível, ou seja, que $q_T = 0$ para $C(q_l) \times q_l$ e $q_l = 0$ para $C(q_T) \times q_T$. Na figura 5.4, porém, consideramos o caso mais realista, com estatística finita, refletindo as limitações experimentais. Isso usualmente é feito colocando os dados em pequenos intervalos de momentos (“bins”), projetando as funções de correlação nas variáveis desejadas, tal qual discutimos no início da seção

5.3. Nos dois casos encontramos apenas uma pequena diferença entre as funções de correlação devido à consideração de pacotes de onda mínimos. Cabe ressaltar aqui que, embora tenhamos considerado uma largura P_i para a distribuição de momentos da fonte gaussiana, a função de correlação não apresenta dependência nesse parâmetro, já que as distribuições se fatoram. Isto, porém, não acontece quando tratamos o espectro dela decorrente, pois este apresenta uma forte dependência em P_i , o que pode ser observado com o auxílio das figuras 5.1 e 5.4, para a função de correlação, e 5.2, para o espectro. A Fig.5.2 mostra uma discrepância acentuada entre a distribuição teórica gaussiana de momentos e a utilizada por Bertsch, cuja dependência funcional foi sugerida pelos ajustes experimentais, na forma de uma exponencial. Tendo verificado que as curvas de correlação pouco diferem entre si quando introduzimos pacotes de onda mínimos, esperaríamos que a densidade média do espaço de fase, refletisse de maneira mais acentuada a parametrização adotada para o espectro do que as hipóteses sobre a função de correlação. Isto, de fato, foi o que observamos, sendo o comportamento da densidade média mostrado nas figuras 5.3 e 5.5, onde notamos apenas um pequeno abaixamento das curvas devido à presença dos pacotes de onda mínimos.

Outro modelo teórico que estudamos foi o “Inside-Outside Cascade” de Bjorken [2, 3], o qual considera que a fonte emissora de pions esteja em expansão. A função de correlação decorrente deste modelo é idêntica à obtida por Kolehmainen-Gyulassy (K-G) na ref. [28], quando levamos em conta incerteza mínima e tomamos $\Delta p \approx \sqrt{m_\pi T_f}$ [7]. Comparamos, então, esta função de correlação com as obtidas pela parametrização gaussiana com e sem pacotes de onda mínimos, conforme mostrados nas figuras 5.6 e 5.10. Para estas comparações, também consideramos tanto o caso hipotético de uma estatística ilimitada, quanto o mais realista, em que a estatística é finita. Concluimos que as diferenças entre as curvas de correlação refletindo fontes estáticas e fontes em expansão são muito pequenas, acentuando-se mais para $q_l \gtrsim 0.05$ MeV quando observamos $C(q_l) \times q_l$, pois é em função dessa componente que os efeitos da expansão (longitudinal) se manifestam de forma mais pronunciada. No estudo da função de correlação, dentro do modelo que denominamos K-G, analisamos essencialmente duas regiões cinemáticas. Na primeira, nós nos restringimos ao plano de emissão transversal correspondente à região central de rapidez, isto é, em que $y = (y_1 + y_2)/2 = 0$. Na segunda, mais geral, estendemos a análise a toda a região de rapidez usualmente acessível à experiência.

Quando comparamos o espectro correspondente ao caso em que a expansão da fonte é considerada, com o espectro exponencial inspirado no ajuste de dados, observamos que as curvas destas parametrizações são muito próximas entre si, conforme mostrado na Fig. 5.7. O espectro gerado pelo modelo gaussiano, porém, desvia-

se muito destas curvas, segundo é indicado na Fig. 5.8, ressaltando que uma tal parametrização não seria adequada para representar o espectro. Ela foi aqui considerada apenas para estudar as conseqüências que uma tal distribuição gaussiana teria sobre $\langle f \rangle$.

A média da densidade de espaço de fase decorrente do modelo K-G em questão é representada nas figuras 5.9 e 5.11. Observamos nestes gráficos uma maior proximidade entre a curva correspondente ao modelo K-G e aquela gerada pela proposta de Bertsch, do que entre estas e o modelo puramente gaussiano. Tal qual observamos no caso do modelo espaço-temporal gaussiano, o comportamento das curvas nas Figuras 5.9 e 5.11 reflete a dependência acentuada na parametrização adotada para o espectro.

As Figuras 5.5 e 5.11, ilustram qualitativamente a densidade média do espaço de fase de colisões Si+Au a energias do AGS/BNL, pois foram geradas com parâmetros de interferometria e espectro inspirados naqueles ajustados pela experiência. Nestas, está subentendido que $\langle f \rangle$ foi estimado por unidade de rapidez. Em outras palavras, faltaria incluir um fator multiplicativo que refletisse a quantidade de partículas detectadas no intervalo de rapidez varrido pela experiência. Tal fator normalmente não é estimado. Conforme discutimos no Capítulo 5, a parametrização da distribuição de rapidez com base nos dados experimentais, é usualmente obtida após a integração sobre todos os momentos transversais. Por essa razão, quando estimamos um tal número no Cap. 5, apenas para dar uma idéia qualitativa aproximada, vimos que o fator multiplicativo de $\langle f \rangle$ seria exageradamente grande. Apesar disso, podemos comparar as curvas das Figuras 5.5 e 5.11 com aquela exibida na Fig. 4.1, correspondente ao resultado de Bertsch, refletindo as expressões obtidas, as quais não incluem o fator multiplicativo mencionado acima. Vemos que o comportamento da curva da Fig. 4.1 para $\langle f \rangle$ é bem reproduzido pelas curvas mais altas da Fig. 5.3, discordando, porém, das duas mais baixas, geradas pela distribuição gaussiana fictícia de momentos. Os resultados mostram ainda que há pouca sensibilidade aos pacotes de onda mínimos. Se então compararmos a Fig. 4.1 com a 5.11, notamos que a curva mais alta continua praticamente idêntica às expectativas com base nas parametrizações sugeridas por Bertsch. A curva média, conseqüência do modelo de Bjorken, que considera a expansão longitudinal da fonte, apresenta uma pequena diferença, especialmente na região de pequenos $|\vec{K}|$. Mas, devido às incertezas experimentais, tal diferença provavelmente não seria significativa para ser detectada pelos dados. Contudo, observamos também, pelas Figuras 5.3 e 5.9 que a restrição drástica ao plano transversal na região central de rapidez, ainda que fosse possível selecioná-la experimentalmente, não traria grandes vantagens para a distinção de $\langle f \rangle$ nos cenários considerados. Isto porque nossos estudos indicam que quanto mais

ampla a região estudada (e, provavelmente, isso se acentue caso consideremos a expansão tri-dimensional da fonte), tanto maior a possibilidade de distinção entre os diferentes modelos.

Ao compararmos as funções de correlação correspondentes às parametrizações e modelos estudados, notamos que os resultados mostraram pequena sensibilidade em relação à adoção de pacotes de onda mínimos, ao menos para a largura aqui adotada para o pacote de ondas. Além disso, pouca diferença foi observada com relação à descrição dos dados por gaussianas estáticas ou por modelos (Bjorken) que levassem em conta a expansão da fonte. Isto indica que a tendência que sempre dominou as experiências de interferometria, de ajustar os dados por meio de parametrizações gaussianas para a fonte, de fato, não está completamente equivocada. A largura daquelas curvas (cujo inverso é proporcional à dimensão da fonte investigada) não muda significativamente em relação ao modelo investigado por Bjorken, o qual é mais realista a altas energias. O cuidado que devemos ter, porém, é quanto à interpretação dos resultados, pois os parâmetros ajustados por gaussianas são *efetivos*, podendo conter, de modo não explícito e incontrolável, dependência no intervalo de momentos considerado e em outras variáveis. Isto, inegavelmente, pode comprometer a tentativa de uma reconstrução fiel da fonte emissora de partículas a altas energias. No entanto, conforme analisado na ref. [29], no caso da emissão ocorrer durante todo o processo de expansão da fonte e não apenas da superfície de "freeze-out", são observadas distorções significativas em relação ao comportamento gaussiano da função de correlação de Bose-Einstein entre dois pions idênticos.

Apêndice A

A.1 Aditividade da rapidez

A rapidez de partícula em um dado referencial é definido por

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (\text{A.1})$$

A rapidez é uma variável aditiva. Para demonstrar essa propriedade consideremos uma partícula no referencial centro de massa F, a qual viaja na direção positiva do eixo z , com a velocidade $\beta = p_z/E$. Sendo a energia da partícula dada por $E = \gamma m$, e p_z o momento dela ao longo da direção do “boost”, aplicando a definição acima a rapidez da partícula torna-se

$$y_\beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + p_z/E}{1 - p_z/E} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \quad (\text{A.2})$$

A expansão desta expressão para pequenos valores de β , $y_\beta = \beta + \mathcal{O}(\beta^3)$ indica que, no caso não-relativístico, a rapidez de uma partícula é aproximadamente igual à velocidade longitudinal da partícula: $y_\beta \approx \beta$.

Consideremos agora um referencial F' movendo-se com velocidade β na direção positiva do eixo z do referencial F. Consideremos ainda que a partícula se move, com rapidez y' em relação a F' e com rapidez y em relação a F. A rapidez y' da partícula em relação a F' será, então

$$y' = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z} \right). \quad (\text{A.3})$$

Com as transformações de Lorentz

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - \beta p_z) \\ p'_z = \gamma(p_z - \beta E) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

temos

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma(1-\beta)(E+p_z)}{\gamma(1+\beta)(E-p_z)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+p_z}{E-p_z} \right) \\
 &= y - \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)}_{y_\beta} = y - y_\beta
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$y = y' + y_\beta. \quad (\text{A.5})$$

Vemos que a variável de rapidez é aditiva, pois a rapidez y da partícula no referencial F é obtida somando-se a rapidez y' da mesma partícula em relação a F' à rapidez do referencial em movimento y_β .

A.2 Densidade de energia em $y_L \leq y \leq y_R$

Seja a distribuição de rapidez no referencial F' :

$$\left. \frac{dN}{dy'} \right|_{y'}$$

Aplicando (A.5) na expressão acima, encontramos que

$$\left. \frac{dN}{dy'} \right|_{y'} = \left. \frac{dN}{dy} \right|_{y=y'+y_\beta} \quad (\text{A.6})$$

Segundo a equação (2.5), a densidade de energia inicial da matéria no referencial F' é igual a

$$\varepsilon'_0(F') = \frac{m_T}{\tau_0 \mathcal{A}} \left. \frac{dN}{dy'} \right|_{y'=0}$$

ou

$$\varepsilon'_0(F') = \frac{m_T}{\tau_0 \mathcal{A}} \left. \frac{dN}{dy} \right|_{y=y_\beta} \quad (\text{A.7})$$

segundo a expressão (A.6).

Segundo as considerações da seção 2.3, a rapidez y_β da partícula em questão, poderia estar limitada à faixa

$$y_L \leq y_\beta \leq y_R, \quad (\text{A.8})$$

então,

$$\varepsilon'_0(F') = \frac{m_T}{\tau_0 \mathcal{A}} \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \quad (\text{A.9})$$

Comparando este resultado com a densidade de energia no referencial F , isto é

$$\varepsilon_0(F) = \frac{m_T}{\tau_0 \mathcal{A}} \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0},$$

teremos que

$$\varepsilon'_0(F') = \varepsilon_0(F). \quad (\text{A.10})$$

Podemos ver que a densidade de energia independe do referencial dentro do intervalo (A.8) acima. Devemos notar, também, que o intervalo onde y_β está definido, dado na equação (A.8), aumenta com a energia da colisão.

A.3 Expressão estatística de ε

Consideremos um sistema em equilíbrio térmico a uma temperatura T muito alta e que seus constituintes, quarks e gluons, estejam confinados no interior deste sistema. Para simplificar, vamos considerar um regime, tal que as interações entre quarks e gluons sejam desprezíveis. Vamos supor também que os quantas sejam não massivos e que a densidade bariônica resultante seja nula ($\mu = 0$). As densidades de energia dos quarks q , antiquarks \bar{q} e gluons g são dadas, respectivamente, por

$$\varepsilon_q = c_q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p}{e^{\beta p} + 1},$$

$$\varepsilon_{\bar{q}} = c_{\bar{q}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p}{e^{\beta p} + 1},$$

$$\varepsilon_g = c_g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p}{e^{\beta p} - 1}$$

onde $\beta = 1/T$ e c_q , $c_{\bar{q}}$, c_g são respectivamente a degenerescência do quark, antiquark e gluon.

Resolveremos inicialmente a equação para o caso dos quarks. Integrando a parte angular, encontramos

$$\varepsilon_q = \frac{c_q}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{e^{\beta p} + 1}.$$

Mudando de variável de βp para z , teremos

$$\varepsilon_q = \frac{c_q T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dz \frac{z^3 e^{-z}}{1 + e^{-z}},$$

escrevendo $1/(1 + e^{-z})$ na forma de série encontraremos que

$$\varepsilon_q = \frac{c_q T^4}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} dz z^3 e^{-(k+1)z}.$$

Comparando a integral com a função gama,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} dx x^{n-1} e^{-x},$$

teremos

$$\varepsilon_q = \frac{c_q T^4}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(4)}{(k+1)^4}.$$

A somatória pode ser manipulada de modo a obtermos uma forma correspondente à função zeta de Riemann. Dessa maneira teremos

$$\varepsilon_q = \frac{7}{8} \frac{c_q \pi^2}{30} T^4 \quad (\text{A.11})$$

Analogamente, a densidade de energia para os antiquarks e os gluons serão iguais a

$$\varepsilon_{\bar{q}} = \frac{7}{8} \frac{c_{\bar{q}} \pi^2}{30} T^4 \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon_g = \frac{c_g \pi^2}{30} T^4 \quad (\text{A.13})$$

Como a densidade de energia total é a soma das densidades de energia das partículas envolvidas no sistema, teremos

$$\varepsilon = \varepsilon_q + \varepsilon_{\bar{q}} + \varepsilon_g$$

assim, encontramos

$$\varepsilon = c_{total} \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (\text{A.14})$$

onde

$$c_{total} = c_g + \frac{7}{8}(c_q + c_{\bar{q}})$$

Apêndice B

B.1 Fontes caóticas

No caso de fontes caóticas, a fase $\phi(x)$ se caracteriza por ser uma função aleatória, associada à coordenada x do ponto de fonte.

Então, separando a Eq. (3.13) em termos que dependem da função $\phi(x)$ e em termos que independam da mesma, teremos,

$$P(k) = \sum_x A^2(k, x) + \sum_{x \neq y} A(k, x)A(k, y)e^{i\phi(x)}e^{-i\phi(y)}e^{ik \cdot (x-y)} \quad (\text{B.1})$$

O segundo termo da Eq.(B.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{2} \sum_{x \neq y} A(k, x)A(k, y) \left[e^{i\phi(x)}e^{-i\phi(y)}e^{ik \cdot (x-y)} \right. \\ &\quad \left. + e^{i\phi(y)}e^{-i\phi(x)}e^{ik \cdot (y-x)} \right] \\ &= \sum_{x \neq y} A(k, x)A(k, y) \cos [(k \cdot x + \phi(x)) - (k \cdot y + \phi(y))] \end{aligned}$$

Devemos notar que a fase aleatória $\phi(x)$ flutua bem mais rapidamente que o fator $k \cdot x$. Podemos reescrever ainda

$$\begin{cases} \Phi(x) = k \cdot x + \phi(x) \\ \Phi(y) = k \cdot y + \phi(y) \end{cases},$$

de forma que o segundo termo em (B.1) ficaria

$$\begin{aligned} II &= \sum_x A(k, x) \cos [\Phi(x)] \sum_{x \neq y} A(k, y) \cos [\Phi(y)] \\ &\quad + \sum_x A(k, x) \sin [\Phi(x)] \sum_{x \neq y} A(k, y) \sin [\Phi(y)] \end{aligned}$$

Agora,

$$\sum_{x \neq y} A(k, y) \cos [\Phi(y)] = \left\{ \sum_y A(k, y) \cos [\Phi(y)] \right\} - A(k, x) \cos [\Phi(x)]$$

como estamos tratando com fontes aleatórias, podemos escrever

$$\sum_{y=1}^N A(k, y) \cos [\Phi(y)] \simeq NA(k, x) \cos [\Phi(x)]$$

onde N representa o número de pontos de fonte. Então,

$$\sum_{x \neq y} A(k, y) \cos [\Phi(y)] = \frac{N-1}{N} \sum_y A(k, y) \cos [\Phi(y)]$$

No caso de N ser muito grande,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} \sim 1$$

teremos assim

$$\sum_{x \neq y} A(k, y) \cos [\Phi(y)] \sim \sum_y A(k, y) \cos [\Phi(y)].$$

O mesmo pode ser feito para o termo

$$\sum_{x \neq y} A(k, y) \sin [\Phi(y)] \sim \sum_y A(k, y) \sin [\Phi(y)].$$

Então,

$$\begin{aligned} II &\approx \sum_x A(k, x) \cos [\Phi(x)] \sum_y A(k, y) \cos [\Phi(y)] \\ &\quad + \sum_x A(k, x) \sin [\Phi(x)] \sum_y A(k, y) \sin [\Phi(y)] \\ &\approx \left| \sum_x A(k, x) \cos [\Phi(x)] \right|^2 + \left| \sum_x A(k, x) \sin [\Phi(x)] \right|^2 \\ &\approx \dots \end{aligned}$$

Como a coordenada x é um quadri-vetor, a somatória pode ser escrita como

$$\sum_x A(k, x) \cos [\Phi(x)] = \sum_{\vec{x}} \left\{ \sum_t A(k, t, \vec{x}) \cos [\Phi(t, \vec{x})] \right\}$$

Supondo que as amplitudes $A(k, t, \vec{x})$ variem no tempo muito mais lentamente do que as fases aleatórias, então, durante um período de tempo τ da fase de flutuação aleatória em torno do tempo τ_0 , temos

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_0 - \tau/2 \leq t \leq \tau_0 + \tau/2} A(k, t, \vec{x}) \cos [\Phi(t, \vec{x})] &\approx A(k, \tau_0, \vec{x}) \sum_{\tau_0 - \tau/2 \leq t \leq \tau_0 + \tau/2} \cos [\Phi(t, \vec{x})] \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Assim, se somarmos sobre o parâmetro temporal, teremos que

$$\sum_t A(k, t, \vec{x}) \cos [\Phi(t, \vec{x})] \approx 0 \quad .$$

Procedendo analogamente para o termo em seno, teremos

$$\sum_t A(k, t, \vec{x}) \sin [\Phi(t, \vec{x})] \approx 0 \quad .$$

Substituindo esses resultados em II, teremos

$$II = \sum_{x \neq y} A(k, x) A(k, y) e^{i\phi(x)} e^{-i\phi(y)} e^{ik \cdot (x-y)} \approx 0$$

Desse modo, concluímos que a equação (B.1) se reduz à forma

$$P(k) = \sum_x A^2(k, x) \tag{B.2}$$

Apêndice C

C.1 Formalismo de Pratt

Consideremos uma fonte emissora de pions, descrita por

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= e^{\int d^4x \eta(x) \phi(t) \psi^\dagger(x)} |0\rangle \\ &= e^{\int d^3k dt \eta(\vec{k}, t) \phi(t) \exp(iE_{\vec{k}}t) c^\dagger(\vec{k})} |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $\psi^\dagger(x)$ é o operador criação na representação de Heisenberg, e $\phi(t)$ é o fator de fase aleatório, o qual indica que os pions não estejam correlacionados,

$$\langle \phi^*(t) \phi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (\text{C.2})$$

Com a normalização de $\phi(t)$, dada na eq.(C.2) acima, verificamos que $|\eta(x)|^2$ representa a amplitude de probabilidade do pion ser emitido na coordenada espaço-temporal x , e que $|\eta(\vec{k}, t)|^2$ representa a amplitude de probabilidade, por unidade de tempo, do pion ser emitido com momento \vec{k} e energia $E_{\vec{k}}$, sendo $\eta(\vec{k}, t)$ a transformada de Fourier de $\eta(x)$. Os estados η são autoestados do operador de destruição, $c(\vec{k})$, na representação de Schrödinger, os quais têm a propriedade de remover um pion sem alterar o estado, o que significa que o número de pions não é conservado. Com estes autoestados podemos escrever a probabilidade de que dois pions, produzidos na fonte, possam ser posteriormente detectados. Tal probabilidade será escrita na forma

$$P(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c^\dagger(\vec{k}_2) c(\vec{k}_2) c(\vec{k}_1) | \eta \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Para o caso de um único pion, a probabilidade de que ele seja produzido na fonte e posteriormente seja detectado, será dada por

$$P(\vec{k}_i) = \langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_i) c(\vec{k}_i) | \eta \rangle. \quad (\text{C.4})$$

Desse modo, a função de correlação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} C(\vec{k}_i) &= \frac{\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c^\dagger(\vec{k}_2) c(\vec{k}_2) c(\vec{k}_1) | \eta \rangle}{\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_1) | \eta \rangle \langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_2) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle} \\ &= 1 + \frac{|\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle|^2}{\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_1) | \eta \rangle \langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_2) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Como os estados $|\eta\rangle$ são autoestados do operador $c(\vec{k})$, temos

$$\begin{cases} c(\vec{k}_1)|\eta\rangle = \int d^3k dt \eta(\vec{k}_1, t) \phi(t) e^{iE_1 t} |\eta\rangle \\ c(\vec{k}_2)|\eta\rangle = \int d^3k dt \eta(\vec{k}_2, t) \phi(t) e^{iE_2 t} |\eta\rangle \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

com as quais calculamos

$$\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle = \int d^3k d^3k' dt \eta^*(\vec{k}_1, t) \eta(\vec{k}_2, t) e^{i(E_2 - E_1)t} \quad (\text{C.7})$$

onde utilizamos a Eq.(C.2). Agora, com a relação $(k_2 - k_1) \cdot x$ encontramos que $(E_2 - E_1)t = -q \cdot x - \vec{q} \cdot \vec{r}$, onde $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ é o 3-vetor momento relativo. A Eq.(C.7) torna-se

$$\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle = \int d^3k d^3k' dt \eta^*(\vec{K} + \vec{q}/2, t) \eta(\vec{K} - \vec{q}/2, t) e^{-iq \cdot x} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}, \quad (\text{C.8})$$

sendo $\vec{K} = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)/2$ é o 3-vetor momento médio. Em analogia às funções de Wigner, definimos a função

$$\begin{aligned} g(x, \vec{k}) &= \int d^3r' \eta^*(\vec{r} + \vec{r}'/2, t) \eta(\vec{r} - \vec{r}'/2, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \int d^3k' \eta^*(\vec{k} + \vec{k}'/2, t) \eta(\vec{k} - \vec{k}'/2, t) e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Então, a Eq.(C.8) pode ser escrita como

$$\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle = \int d^3k dt g(x, \vec{K}) e^{-iq \cdot x}. \quad (\text{C.10})$$

Invertendo a transformada de Fourier na Eq.(C.10) acima, encontramos que

$$\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_1) c(\vec{k}_2) | \eta \rangle = \int d^4x g(x, \vec{K}) e^{iq \cdot x}. \quad (\text{C.11})$$

Considerando $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 \equiv \vec{k}_i$, vemos que $g(x, \vec{k}_i)$ pode ser identificado com a probabilidade de emissão de um pion com momento \vec{k}_i , produzido no ponto espaço-temporal x ,

$$\langle \eta | c^\dagger(\vec{k}_i) c(\vec{k}_i) | \eta \rangle = \int d^4x_i g(x_i, \vec{k}_i). \quad (\text{C.12})$$

onde o subíndice, i , na coordenada espaço-temporal, x , foi introduzida para diferenciar as distribuição da partícula 1 da partícula 2. Assim, introduzindo as Eqs.(C.11) e (C.12) na função de correlação, obtemos

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 1 + \frac{\int d^4x d^4x' g(x, \vec{K}) g(x', \vec{K}) e^{iq \cdot (x-x')}}{\int d^4x_1 g(x_1, \vec{k}_1) \int d^4x_2 g(x_2, \vec{k}_2)}. \quad (\text{C.13})$$

Apêndice D

D.0.1 Formalismo da densidade de Wigner

O cálculo da distribuição inclusive, $P(\alpha)$, da configuração final múltipla de pions nos estados $|\alpha\rangle$, pode ser feito através do conhecimento da matrix densidade $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ do sistema. Tal distribuição segue a forma [8, 9],

$$P(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} \rho_\alpha \rho(t) = \int dt \text{Tr} \rho_\alpha \frac{d}{dt} \rho(t) = -i \int dt \text{Tr} \rho_\alpha [H_I, \rho(t)], \quad (\text{D.1})$$

onde foi usado a equação de movimento de ρ , e o Hamiltoniano separado da parte livre, H_0 , cujos autoestados incluem $|\alpha\rangle$, da parte de interação, H_I , que inclui as fontes de correntes de pions e sua interação com outras partículas do sistema. Na Ref. [7] foi considerado que $[H_0, \rho_\alpha] = 0$, e que não exista interação entre os estados de multipions, isto é, $|\alpha\rangle = |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$, para que H_0 corresponda ao hamiltoniano livre. Utilizando o traço na representação de Wigner, a distribuição inclusive de n pions pode ser escrita como

$$P(\alpha) = \int dt \int d\phi_1 \dots d\phi_n W_\alpha(\phi_1, \dots, \phi_n) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_I f_n(\phi_1, \dots, \phi_n, t), \quad (\text{D.2})$$

onde $\phi_i = (\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ são as coordenadas 6-dimensionais do espaço de fase, e o elemento $d\phi_i = d^3\vec{r}_i d^3\vec{p}_i (2\pi)^{-3}$ em unidades $\hbar = c = 1$. O índice I na derivada temporal indica que apenas a variação de f_n , no tempo devido às interações serão levadas em conta. Na Eq.(D.2), W_α é a representação de Wigner da matrix densidade assintótica, $\rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$,

$$W_\alpha(\phi_1, \dots, \phi_n) = \int \left\{ \prod_{j=1}^n d^3\vec{y}_j e^{-i\vec{p}_j \cdot \vec{y}_j} \right\} \langle \{\vec{x}_i + \vec{y}_i/2\} | \rho_\alpha | \{\vec{x}_i - \vec{y}_i/2\} \rangle, \quad (\text{D.3})$$

e f_n , a densidade de espaço de fase inclusive de n pions no tempo t ,

$$f_n(\phi_1, \dots, \phi_n, t) = \int \left\{ \prod_{j=1}^n d^3\vec{y}_j e^{-i\vec{p}_j \cdot \vec{y}_j} \right\} \langle \{\vec{x}_i + \vec{y}_i/2\} | \rho(t) | \{\vec{x}_i - \vec{y}_i/2\} \rangle. \quad (\text{D.4})$$

Então, ignorando as interações do estado final, a função de onda final simetrizada será escrita na forma

$$\langle \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \rangle = \frac{(2\pi)^{-3n/2}}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma} e^{i\vec{k}_{\sigma_1} \cdot \vec{x}_1} \dots e^{i\vec{k}_{\sigma_n} \cdot \vec{x}_n}, \quad (\text{D.5})$$

o que conduz a seguinte densidade de Wigner

$$W_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n}(\phi_1, \dots, \phi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \tilde{\sigma}} \prod_{i=1}^n \left\{ e^{-i\vec{q}_{\sigma_i \tilde{\sigma}_i} \cdot \vec{r}_i} \delta^3(\vec{p}_i - \vec{K}_{\sigma_i \tilde{\sigma}_i}) \right\}, \quad (\text{D.6})$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ e $\tilde{\sigma}$ denotam as permutações dos vetores de índices n , e sendo $\vec{q}_{ij} = \vec{k}_i - \vec{k}_j$ e $\vec{K}_{ij} = (\vec{k}_i + \vec{k}_j)/2$ o momento relativo e o momento médio, respectivamente. Definindo a transformada espacial de Fourier da densidade de espaço de fase inclusive como

$$\tilde{f}_n(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n, t) \equiv \int \prod \left\{ (2\pi)^{-3} d^3 \vec{r}_i e^{-i\vec{q}_i \cdot \vec{r}_i} \right\} f_n(\phi_1, \dots, \phi_n, t), \quad (\text{D.7})$$

onde $\tilde{\phi}_i \equiv (\vec{q}_i, \vec{p}_i)$, e considerando a expressão da Eq.(D.6) na Eq.(D.2), e integrando sobre as coordenadas do espaço de fase, a distribuição inclusive de n pions torna-se

$$P_n(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \sum_{\sigma} \int dt \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_I \tilde{f}_n(\tilde{\phi}_{1\sigma_1}, \dots, \tilde{\phi}_{n\sigma_n}, t), \quad (\text{D.8})$$

sendo $\tilde{\phi}_{ij} = (\vec{q}_{ij}, \vec{K}_{ij})$. Foi utilizado a simetria de permutação da distribuição clássica $f_n(\phi_1, \dots, \phi_n, t) = f_n(\phi_{\sigma_1}, \dots, \phi_{\sigma_n}, t)$.

D.0.2 Modelo cascata semiclassico

Segundo a teoria de transporte clássico [10], a distribuição de espaço de fase de n partículas pode ser escrita como a média do conjunto de um produto de distribuições microscópicas,

$$f_n(\phi_1, \dots, \phi_n, t) = \left\langle C_{N,n} \prod_{i=1}^n g_{a_i}(\phi_i, t) \right\rangle, \quad (\text{D.9})$$

sendo a distribuição microscópica

$$g_a(\phi, t) = (2\pi)^3 \delta^6(\phi - \phi_a(t)) \theta(t - t_{a_0}), \quad (\text{D.10})$$

a que descreve a distribuição de espaço de fase da partícula a , que foi produzida no instante t_{a_0} , e que se move ao longo da trajetória clássica

$$\phi_a(t) = (\vec{r}_a(t), \vec{p}_a(t)), \quad t \geq t_{a_0},$$

com

$$d\vec{r}_a/dt = \vec{p}_a/E_a \equiv \vec{v}_a, \quad E_a = (\vec{p}_a^2 + m_a^2)^{1/2}.$$

Na Eq.(D.9), $\langle \dots \rangle$ indica a média do conjunto de colisões sobre as trajetórias das n partículas em eventos com multiplicidade total, N , e $C_{N,n} \equiv N!/(N-n)!$. Introduzindo a Eq.(D.9) na Eq.(D.7), e utilizando a mesma definição de (D.7), encontraremos a transformação da Eq.(D.9),

$$\tilde{f}_n(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n, t) = \left\langle C_{N,n} \prod_{i=1}^n \tilde{g}_{a_i}(\tilde{\phi}_i, t) \right\rangle. \quad (D.11)$$

Podemos incorporar, agora, os efeitos mínimos devido ao princípio de incerteza na distribuição microscópica dada na Eq.(D.10) fazendo a seguinte transformação,

$$(2\pi)^3 \delta^6(\phi - \phi_a(t)) \rightarrow \delta_\Delta^6(\phi - \phi_a(t)) = \frac{1}{(\Delta x \Delta p)^3} e^{-(\vec{r} - \vec{r}_a)^2/2\Delta x^2} e^{-(\vec{p} - \vec{p}_a)^2/2\Delta p^2}, \quad (D.12)$$

com a condição de que $\Delta x \Delta p \geq 1/2$. Na Ref. [7], é considerado o caso mais simples, no qual o transporte pode ser descrito por dinâmica de cascata. O momento dessa partícula muda descontinuamente devido à transferência de momento, $\Delta \vec{p}_{a_i}$, no instante da colisão específica, t_{a_i} , correspondente à i -ésima colisão dessa partícula a . Desse modo, o momento dessa partícula a em um instante qualquer, é dado pela expressão

$$\vec{p}_a(t) = \vec{p}_{a_0} + \sum_{i=1}^{f(a)} \Delta \vec{p}_{a_i} \theta(t - t_{a_i}), \quad (D.13)$$

sendo $f(a)$ o número total de colisões sofridas pela partícula a . Denotaremos a trajetória no espaço de fase como uma linha reta entre os tempos $t_{a_i} \leq t \leq t_{a_{i+1}}$,

$$\phi_{a_i}(t) = (\vec{r}_{a_i} + \vec{v}_{a_i}(t - t_{a_i}), \vec{p}_{a_i}), \quad (D.14)$$

sendo $\vec{r}_{a_i} \equiv \vec{r}_a(t_{a_i})$, $\vec{p}_{a_i} \equiv \vec{p}_a(t_{a_i} + 0)$, e $\vec{v}_{a_i} = \vec{v}_a(t_{a_i} + 0)$. Com isto, a distribuição microscópica semiclássica da Eq.(D.10) pode ser reescrita como

$$g_a(\phi, t) = \theta(t - t_{a_f}) \delta_\Delta^6(\phi - \phi_{a_f}(t)) + \sum_{i=0}^{f(a)-1} \theta(t - t_{a_i}) \theta(t_{a_{i+1}} - t) \delta_\Delta^6(\phi - \phi_{a_i}(t)), \quad (D.15)$$

onde t_{a_f} indica o último instante da colisão, isto é, o instante do desacoplamento da partícula a .

Agora, utilizando a equação de transporte clássico, teremos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right) g_a(\phi, t) = s_a(\phi, t), \quad (D.16)$$

sendo $s_a(\phi, t)$ a densidade de espaço de fase da “fonte” dada por

$$s_a(\phi, t) = \delta(t - t_{a_f})\delta_\Delta^6(\phi - \phi_{a_f}(t)) + \sum_{i=0}^{f(a)-1} \left(\delta(t - t_{a_i}) - \delta(t - t_{a_{i+1}}) \right) \delta_\Delta^6(\phi - \phi_{a_i}(t)). \quad (\text{D.17})$$

A transformada de Fourier da equação de transporte da Eq.(D.16) é dada na forma

$$(\partial_t + i\vec{q} \cdot \vec{v}_{\vec{p}}) \tilde{g}_a(\vec{q}, \vec{p}, t) = \tilde{s}_a(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (\text{D.18})$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\tilde{g}_a(\vec{q}, \vec{p}, t) = e^{-i\vec{q} \cdot \vec{v}_{\vec{p}} t} n_a(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (\text{D.19})$$

sendo

$$n_a(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int_{-\infty}^t dt e^{i\vec{q} \cdot \vec{v}_{\vec{p}} t'} \tilde{s}_a(\vec{q}, \vec{p}, t'). \quad (\text{D.20})$$

Com os resultados acima, a transformada de Fourier espaço-tempo da taxa de interação da Eq.(D.8), segundo a expressão (D.11), é escrito na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_I \tilde{f}_n(\tilde{\phi}_{1\sigma_1}, \dots, \tilde{\phi}_{n\sigma_n}, t) = \left\langle C_{N,n} e^{-i\theta_n t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\prod_{i=1}^n n_{a_i}(\tilde{\phi}_{i\sigma_i}, t) \right) \right\rangle, \quad (\text{D.21})$$

sendo

$$\theta_n(\{\tilde{\phi}_i\}) = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i \cdot \vec{v}_{\vec{p}_i}.$$

Para o caso da interferometria do pion, precisamos de um conjunto especial de coordenadas de momentos, $\{\tilde{\phi}_i\}$, na Eq.(D.8). Para uma dada permutação, σ ,

$$\{\tilde{\phi}_i\} = \{\tilde{\phi}_{i\sigma_i}\} = \{\vec{q}_{1\sigma_1}, \vec{K}_{1\sigma_1}, \dots, \vec{q}_{n\sigma_n}, \vec{K}_{n\sigma_n}\}. \quad (\text{D.22})$$

Com isto, encontraremos que

$$\theta_n(\{\tilde{\phi}_{i\sigma_i}\}) = \sum_{i=1}^n (\vec{k}_i^2 - \vec{k}_{\sigma_i}^2) / E_{i\sigma_i} \approx 0, \quad (\text{D.23})$$

onde $E_{i\sigma_i} = ((\vec{k}_i + \vec{k}_{i\sigma_i})^2 / 4 + m^2)^{1/2}$. A distribuição inclusive de n pions, dada na Eq.(D.8), adquirirá, então, a forma

$$P_n(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \approx \sum_{\sigma} \left\langle C_{N,n} \prod_{i=1}^n n_{a_i}(\tilde{\phi}_{i\sigma_i}, \infty) \right\rangle, \quad (\text{D.24})$$

onde

$$n_{a_i}(\tilde{\phi}_{i\sigma_i}, \infty) = (2\pi)^{-3} \int d^4x e^{iq_{ij}^\mu x_\mu} s_a(\vec{r}, \vec{K}_{ij}, t) \quad (\text{D.25})$$

é a transformada de Fourier da distribuição de fonte $s_a(\phi, t)$ da Eq.(D.17). A componente temporal do momento relativo da Eq.(D.25) é aproximadamente dada por

$$q_{ij}^0 = \vec{q}_{ij} \cdot \frac{\vec{K}_{ij}}{E_{ij}} \approx (\vec{k}_i^2 + m^2)^{1/2} - (\vec{k}_j^2 + m^2)^{1/2}.$$

A transformada de Fourier de s_a na Eq.(D.17) é escrita na forma

$$n_a(\vec{q}, \vec{K}, \infty) = e^{iq \cdot x_{a_f}} \tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{K} - \vec{p}_{a_f}) + \sum_{i=0}^{f(a)-1} \left(e^{iq \cdot x_{a_i}} - e^{iq \cdot x_{a_{i+1}}} \right) \tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{K} - \vec{p}_{a_i}). \quad (\text{D.26})$$

onde a função delta suavizada a uma gaussiana é dada por

$$\tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\Delta p^2)^{-3/2}} e^{-\vec{p}^2/2\Delta p^2} e^{-\vec{q}^2\Delta x^2/2}. \quad (\text{D.27})$$

Vemos que no limite, $\Delta x, \Delta p \rightarrow 0$, obviamente $\tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow \delta_\Delta^3(\vec{p})$.

No limite estritamente clássico, $\Delta x, \Delta p \rightarrow 0$, todos os termos na soma desaparecem, devido às partículas clássicas se propagarem em linhas retas entre as colisões, do modo que

$$\vec{v}_{a_i} t_{a_{i+1}} - \vec{r}_{a_{i+1}} = \vec{v}_{a_i} t_{a_i} - \vec{r}_{a_i}.$$

Portanto, no limite clássico, só o instante de desacoplamento final é a que efetivamente contribui, e (D.26) reduz-se a

$$n_a(\vec{q}, \vec{K}, \infty) \approx e^{iq \cdot x_{a_f}} \delta_\Delta^3(\vec{K} - \vec{p}_{a_f}). \quad (\text{D.28})$$

Agora, considerando $\Delta p > 0$, as correções das colisões podem ser ignoradas se $R \gg \lambda$, sendo R o raio e λ o caminho livre médio. Nesse caso, a somatória terá um número muito grande de termos, mas a diferença das fases é muito pequena em cada termo,

$$\langle e^{iq \cdot x_{a_{i+1}}} - e^{iq \cdot x_{a_i}} \rangle \sim (\vec{q} \cdot \delta \vec{v} \delta t)^2,$$

pois, já que na faixa de interesse, $q \sim 1/R$, e o intervalo de tempo entre as colisões, $\delta t \sim \lambda/v_a$, a quantidade $(\vec{q} \cdot \delta \vec{v} \delta t)^2 \sim (\lambda/R)^2$, desse modo, os termos lineares desaparecem.

Com as considerações acima, a Eq.(D.24) pode ser reescrita como

$$P_n(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \approx \sum_\sigma \left\langle C_{N,n} \prod_{i=1}^n e^{iq_{i\sigma_i} \cdot x_i} \tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}_{i\sigma_i}, \vec{K}_{i\sigma_i} - \vec{p}_i) \right\rangle, \quad (\text{D.29})$$

envolvendo unicamente as coordenadas do espaço de fase, (\vec{r}_i, \vec{p}_i) , dos pions no instante do desacoplamento, t_i .

Devemos enfatizar que, a Eq.(D.29) permite correlações dinâmicas arbitrárias entre as coordenadas do espaço de fase 7-dimensional de desacoplamento, e também as correlações dinâmicas arbitrárias de n pions. Ainda que as correções das cascatas intermediárias sejam pequenas na Eq.(D.29), as correlações que resultam delas podem modificar fortemente o modelo de interferência final [17]. No caso de ocorrer pouquíssimas colisões, as Eqs.(D.24) e Eq.(D.26) indicam um modo de calcular as distorções causadas pela cascata de estados intermediários.

Na ausência de correlações dinâmicas, o conjunto médio da Eq.(D.29) pode ser escrito em termos da transformada de Fourier espaço-temporal da distribuição de desacoplamento

$$D(q, \vec{p}) = \int d^4x g(x, \vec{p}) e^{iqx}. \quad (\text{D.30})$$

Desse modo, a distribuição inclusive de n partículas da expressão (D.29) se modifica para uma forma geral

$$P_n(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \approx \langle C_{N,n} \rangle \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n D_{\Delta}(q_{i\sigma_i}, \vec{K}_{i\sigma_i}), \quad (\text{D.31})$$

onde D_{Δ} é o pacote de onda suavizado da distribuição de desacoplamento

$$D_{\Delta}(q, \vec{K}) = \int d^3p D(q, \vec{p}) \tilde{\delta}_{\Delta}(\vec{q}, \vec{p} - \vec{K}). \quad (\text{D.32})$$

Apêndice E

E.1 Função de correlação com base na generalização da formulação de Pratt

Segundo o formalismo da ref. [7], a função de correlação pode ser definida por

$$C_{\Delta}(k_1, k_2) = 1 + \frac{D_{\Delta}(q, K)D_{\Delta}(-q, K)}{D_{\Delta}(0, k_1)D_{\Delta}(0, k_2)}, \quad (\text{E.1})$$

onde

$$D_{\Delta}(\pm q, K) = \int d^4 p g(\pm q, p) \tilde{\delta}_{\Delta}(\pm q, p - K).$$

sendo $g(\pm q, p)$ a transformada de Fourier de $g(x, p)$, a qual é a distribuição de desacoplamento do espaço de fase; a função delta suavizada tem a forma

$$\tilde{\delta}_{\Delta}(q, p) = \frac{1}{(2\pi\Delta p^2)^{3/2}} e^{p/2\Delta p^2} e^{q^2\Delta x^2/2} \quad (\text{E.2})$$

Reescrevendo explicitamente a expressão $D_{\Delta}(\pm q, K)$, teríamos

$$D_{\Delta}(\pm q, K) = \int d^4 p d^4 x e^{\pm i q \cdot x} g(x, p) \tilde{\delta}_{\Delta}(\pm q, p - K). \quad (\text{E.3})$$

Consideremos primeiramente a distribuição ideal *inside-outside* sugerida por Bjorken, que corresponde a

$$g(x, p) \propto \left\langle \frac{dN}{dy} \delta(t - \tau_f \cosh y_f) \delta(z - \tau_f \sinh y_f) e^{-\tau_f^2/2R_T^2} \times \right. \\ \left. \times \delta(E - \sqrt{\vec{p}_f^2 + m_{\pi}^2}) \delta(p_z - m_T \sinh y_f) \delta^2(p_{Tf}) \right\rangle, \quad (\text{E.4})$$

Expressando, então, t e z em termos das variáveis de tempo-próprio, τ , e de rapidez de espaço-tempo, η , E e p_z em termos da massa transversal, m_T , e da rapidez, y , a fonte emissora de pions tem as seguintes características:

$$\begin{cases} t = \tau \cosh \eta \\ z = \tau \sinh \eta \end{cases} ; \begin{cases} E = m_T \cosh y \\ p_z = m_T \sinh y \end{cases}. \quad (\text{E.5})$$

Aplicando algumas propriedades da distribuição delta, encontraremos que

$$\begin{aligned} & \delta(t - \tau_f \cosh y_f) \delta(z - \tau_f \sinh y_f) \delta(p_z - m_T \sinh y_f) \\ &= \frac{1}{\tau_f} \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \frac{1}{E_f} \delta(y - y_f) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Sendo que a média está dado sobre a distribuição de rapidez, a distribuição $g(x, p)$ fica então

$$\begin{aligned} g(x, p) &\propto \int dy \left\langle \frac{dN}{dy} \right\rangle \frac{1}{\tau_f E_f} \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \times \\ &\times \delta(E - \sqrt{\vec{p}_f + m_\pi^2}) \delta(y - y_f) \delta^2(p_T) e^{-\vec{r}_T^2/2R_T^2} \end{aligned}$$

No modelo de Bjorken assume-se que a região central de rapidez estende-se ao infinito em ambas direções, desse modo a distribuição $g(x, p)$ resultará em

$$g(x, p) \propto \frac{1}{\tau_f E_f} \left\langle \frac{dN}{dy_f} \right\rangle \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \delta(E - \sqrt{\vec{p}_f + m_\pi^2}) \delta^2(p_T) e^{-\vec{r}_T^2/2R_T^2} \quad (\text{E.7})$$

Inserindo a delta suavizada $\tilde{\delta}_\Delta(\vec{q}, \vec{p})$, dada na Eq.(E.2) e o resultado (E.7) acima na Eq.(E.3) teremos a seguinte expressão para a integral no espaço de fase:

$$\begin{aligned} D_\Delta(\pm q, K) &\propto \int d^4p d^4x \frac{1}{\tau_f E_f} \frac{dN}{dy_f} \delta(\tau - \tau_f) \delta(\eta - y_f) \delta(E - \sqrt{\vec{p}_f + m_\pi^2}) \times \\ &\times \delta^2(p_T) e^{\pm i q \cdot x} e^{-\vec{r}_T^2/2R_T^2} e^{(p-K)^2/2\Delta p^2} e^{q^2 \Delta x^2/2} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

O argumento exponencial pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} & -\frac{R_T^2}{2} \vec{q}_T^2 - \frac{1}{2R_T^2} (\vec{r}_T \pm iR_T^2 \vec{q}_T)^2 - \frac{(\vec{p}_T - \vec{K}_T)^2}{2\Delta p^2} + \frac{q^2 \Delta x^2}{2} \\ & \pm i(q_\tau t - q_z z) + \frac{(E - K_\tau)^2 - (p_z - K_z)^2}{2\Delta p^2} \end{aligned}$$

Com as coordenadas (E.5) encontraremos que

$$\begin{aligned} (E - K_\tau)^2 - (p_z - K_z)^2 &= -m_\pi (m_{T_1} \cosh(y - y_1) + m_{T_2} \cosh(y - y_2)) \\ &+ m_\pi^2 + K^2 + \vec{K}_T^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i(q_\tau t - q_z z) &= i\tau (q_\tau \cosh \eta - q_z \sinh \eta) \\ &= i\tau (m_{T_1} \cosh(y_1 - \eta) - m_{T_2} \cosh(y_2 - \eta)). \end{aligned}$$

Assim, escrevendo d^4x e d^4p como $d^2r_T d\tau d\eta$ e $d^2p_T dE dy$, respectivamente, na Eq.(E.8) surgirá, por causa das funções delta dentro da integração, um termo exponencial de argumento

$$-\frac{R_T^2}{2} \vec{q}_T^2 + \frac{q^2 \Delta x^2}{2} + \frac{m_\pi^2 + K^2}{2\Delta p^2}$$

que não é afetado pela integral que restou em dy , cujo funcional exponencial tem como argumento a expressão

$$m_{T_1} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \pm i\tau_f \right] \cosh(y - y_1) + m_{T_2} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \mp i\tau_f \right] \cosh(y - y_2).$$

Substituindo essa expressão por $-z_{12}^\pm \cosh(y - y')$, teremos as relações

$$-z_{12}^\pm \cosh y' = m_{T_1} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \pm i\tau_f \right] \cosh y_1 + m_{T_2} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \mp i\tau_f \right] \cosh y_2$$

$$-z_{12}^\pm \sinh y' = m_{T_1} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \pm i\tau_f \right] \sinh y_1 + m_{T_2} \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} \mp i\tau_f \right] \sinh y_2$$

de onde encontramos

$$z_{12}^{\pm 2} = \left[\frac{m_\pi}{2\Delta p^2} (m_{T_1} + m_{T_2}) \pm i\tau_f (m_{T_1} - m_{T_2}) \right]^2 - 2m_{T_1} m_{T_2} \left(\frac{m_\pi^2}{4\Delta p^4} + \tau_f^2 \right) [1 - \cosh(y_1 - y_2)] \quad (E.9)$$

Com a substituição feita, a integral que restou em dy toma a forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-z_{12}^\pm \cosh(y-y')} = 2K_0(z_{12}^\pm)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificado de ordem zero. Temos utilizado a propriedade

$$K_\nu(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty dy e^{-r \cosh y} \sinh^{2\nu} y$$

Desse modo a Eq.(E.8) torna-se

$$D_\Delta(\pm q, K) \propto \left\langle \frac{dN}{dy} \right\rangle e^{-R_T^2 \vec{q}_T^2 / 2 + q^2 \Delta x^2 / 2 + (m_\pi^2 + K^2) / 2\Delta p^2} K_0(z_{12}^\pm). \quad (E.10)$$

Em particular, quando escolhermos $k_1 = k_2$, isto é, $q = 0$, encontramos

$$D_\Delta(0, k_i) \propto \left\langle \frac{dN}{dy} \right\rangle e^{m_\pi^2 / \Delta p^2} K_0(z_i) \quad (E.11)$$

com

$$z_i = \frac{m_\pi^2}{\Delta p^2}$$

Desse modo, a função de correlação em (E.1) adquire a forma

$$C_\Delta(q, K) = 1 + \frac{|K_0(z_{12})|^2}{K_0(z_1)K_0(z_2)} e^{-R_T^2 \vec{q}_T^2 / 2} e^{q^2 \Delta x^2} e^{-(m_\pi^2 - K^2) / \Delta p^2} \quad (E.12)$$

Apêndice F

F.1 Estimativa da integral $I = \int \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dn}{dy} \right)$

A expressão da média da seção 5.3 tem a forma

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{K}_T; \Delta p, \Delta x) \rangle &= \int dy \left[\frac{dn}{dy} \frac{1}{\sqrt{\vec{K}_T^2 + K_l^2 + m_\pi^2}} \right] \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_\Delta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_0^{\infty} dq_T q_T [C_\Delta(q_T, q_L) - 1]. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Para termos uma idéia, ainda que apenas qualitativa, do comportamento de $\langle f \rangle$ com K_T e comparar com um ajuste experimental para (dn/dy) e ajustes discutidos por Heinz [24, 25], é necessário estimar a integral em dy .

Para estimar a integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh y} \left(\frac{dn}{dy} \right)$, vamos utilizar os dados publicados pela colaboração E802, predecessora da E859, correspondentes à reação Si + Au a 14.6 AGeV [27].

F.1.1

Nessa colaboração, a curva em (dn/dy) para π^+ e π^- é ajustada por:

$$\frac{dn}{dy} \propto (x^{-2} + x^{-1} + 0.5) e^{-x}, \quad (\text{p.849}) \quad (\text{F.2})$$

sendo $x = \frac{m_\pi}{T} \cosh(y - y_0)$; $T_{exp} \approx 160$ MeV; $y_0 = 1.46$

e o intervalo onde há pontos corresponde a $0.86 \lesssim y_{Lab} - y_0 \lesssim 2.06$.

Então, será $K_l = M_T \sinh \bar{y}$ (sendo $\bar{y} \simeq y - y_0$),

$$\begin{aligned} I &= \int_{0.86}^{2.06} dy \left(\frac{dn}{dy} \right) \frac{1}{\sqrt{m_\pi^2 + K_T^2 + K_l^2}} = \frac{1}{M_T} \int_{0.86}^{2.06} dy \left(\frac{dn}{dy} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \bar{y}}} \\ &\simeq \frac{1}{M_T} \int_{0.86}^{2.06} dy \left(\frac{dn}{dy} \right) \frac{1}{\cosh(y - y_0)} \approx \frac{22}{M_T} \left(\frac{dn}{dy} \right) \Big|_{y=y_0}. \end{aligned}$$

De acordo com a ref. [27], $\left(\frac{dn}{dy}\right)_{y=y_0} \approx 16$ e escrevemos $K_l = M_T \sinh \bar{y}$ no referencial onde o espectro é ajustado. Desse modo, a expressão (F.1), para a função de correlação tipo gaussiana, pode ser escrito com a estimativa acima, como

$$\langle f(\vec{K}_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{22}{M_T} \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_0^{\infty} dq_T q_T e^{-R_{\Delta,T}^2 q_T^2 - R_{\Delta,l}^2 q_l^2} \quad (F.3)$$

$$= \frac{22}{\sqrt{\vec{K}_T^2 + m_\pi^2}} \frac{dn}{K_T dK_T} \Big|_{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dq_l \int_0^{\infty} dq_T q_T e^{-R_{\Delta,T}^2 q_T^2 - R_{\Delta,l}^2 q_l^2}. \quad (F.4)$$

Utilizando o espectro gaussiano com pacotes de onda, temos

$$\langle f(\vec{K}_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{22}{M_T} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-K_T^2/2(P_T^2 + m_\pi T_f)}}{R_{\Delta,T}^2 R_{\Delta,l} (P_T^2 + m_\pi T_f)}. \quad (F.5)$$

Para o espectro exponencial com os pacotes,

$$\langle f(\vec{K}_T; \Delta p, \Delta x) \rangle = \frac{22}{M_T} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-K_T/T_f}}{R_{\Delta,T}^2 R_{\Delta,l} T_f}, \quad (F.6)$$

e para o espectro exponencial sem pacotes,

$$\langle f(\vec{K}_T) \rangle = \frac{22}{M_T} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-K_T/T_f}}{R_T^2 R_l T_f}, \quad (F.7)$$

F.1.2

Para o modelo K-G, aproximamos a distribuição (dn/dy) (que, de acordo com os dados, é próxima a uma gaussiana) por uma distribuição tipo platô, com altura

$$\frac{dn}{dy} \approx 11 - 12,$$

de modo que a integral de I_{KG} , resultará em

$$I_{KG} = \int_{0.86}^{2.06} \frac{dy}{\cosh(y - y_0)} \left(\frac{dn}{dy} \right) \approx (11 - 12) \int_{0.86}^{2.06} \frac{dy}{\cosh(y - y_0)} \quad (F.8)$$

$$\approx (11 - 12) \int_{0.86+y_0}^{2.06+y_0} \frac{dy'}{\cosh y'} \approx (11 - 12) \operatorname{arctgh}[\sinh y']_{2.32}^{3.52}. \quad (F.9)$$

Essa aproximação, porém, é ruim, pois não reflete o comportamento dos dados. Em decorrência, vemos o valor obtido é grande demais comparado com o valor estimado ≈ 22 , não podendo ser considerado como exemplo.

Referências

- [1] D.Ter Haar, editado por - *Collected Papers of L.D.Landau*, Gordon e Breach, New York (1965).
- [2] J.D.Bjorken. *Phys.Rev.* D27 (1983) 140.
- [3] C. Y. Wong, *Introduction to High-Energy Heavy Ion Collisions*, World Scientific (1994).
- [4] R. Hanbury Brown, *Phil. Mag.* 7 45 (1954) 663; *Nature* 177 (1956) 27; *Nature* 178 (1956) 1046.
- [5] G.Goldhaber, S.Goldhaber, W.Y.Lee, e A.Pais *Phys. Rev.* 120 (1960) 300.
- [6] G. F. Bertsch *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 2349.
- [7] S. S. Padula, M. Gyulassy and S. Gavin *Nucl. Phys.* B329 (1990) 357.
- [8] E. A. Ramler et al., *Ann. Phys. (N.Y.)* 91 (1975) 295; 95 (1975) 455; 136 (1981) 293.
- [9] M. Gyulassy, K. Frankel and E. Ramler, *Nucl. Phys.* A402 (1983) 596.
- [10] S. Ichimaru, *Basic principles of plasma physics* (Benjamin, New York, 1973).
- [11] R. Anishetty, P. Koehler and L. McLerran, *Phys. Rev.* D22 (1980) 2793.
- [12] UA5 collaboration, K.Alpgard et al., *Phys.Lett.* 107B (1981) 310.
- [13] A.Bujak et al. *Phys.Rev.* D23 (1981) 1895; J.Burg et al., *Nucl.Phys.* B187 (1981) 205.
- [14] L.D.Landau e E.M.Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press (1969).
- [15] E. Purcell, *Nature* 178 (1956) 1449.
- [16] G.Cocconi, *Phys. Lett.* B49 (1974) 456.

- [17] S. Pratt, *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984) 1219.
- [18] U. A. Wiedemann and U. Heinz *Phys.Rept.* 319 (1999) 145.
- [19] E. V. Shuryak, *Phys. Lett.* 44B (1973) 387.
- [20] Vincent Cianciolo *Tese de Doutorado* pelo Massachusetts Institute of Technology: "Bose-Einstein Correlations in 14.6A. GeV/c Si + Au \rightarrow 2K⁺ + X Central Collisions." (1994).
- [21] T. Abbott, et al., *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 847.
- [22] M. Gyulassy and S.S. Padula, *Phys. Lett.* B217 (1988) 181.
- [23] Vincent Cianciolo *Nucl. Phys.* A590 (1995) 459c.
- [24] U. Heinz et al., *hep-ph/9901230*.
- [25] U. Heinz et al., *Phys.Lett.* B457 (1999) 347.
- [26] M. Gyulassy, S.K. Kauffmann and L.W. Wilson *Phys. Rev.* C20 (1979) 2267.
- [27] T. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 847.
- [28] K. Kolehmainen and M. Gyulassy *Phys. Lett.* B180 (1986) 203.
- [29] F. Grassi, Y. Hama, S. S. Padula e O. Socolowski Jr. *hep-ph/0002275*.

