

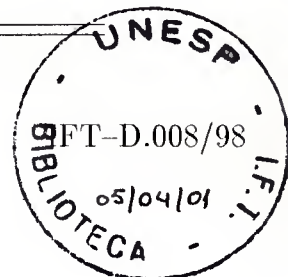




Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

139

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



OK

## IMERSÃO DAS TEORIAS DE SUPERCORDAS

José Nemecio Acosta Jara

Orientador:

Prof. Ph.D. Nathan J. Berkovits



Novembro de 1998

## Resumo

Realiza-se uma introdução as teorias conformes e mostra-se a imersão entre as teorias conformes das cordas  $N = 0$ ,  $N = 1$  e  $N = 2$ . O operador da transformação de similaridade é construído explicitamente. A partir daí mostra-se que as cohomologias dos operadores de BRST, entre as cordas conformes com simetrias  $N = 0$ ,  $N = 1$ ,  $N = 2$  são equivalentes.

Aos meus pais e ao grande espírito  
da Cultura Quechua que reivindicarão  
o seu lugar no Universo, no dia em que  
se unirão ( analize só a verdadeira história)  
os povos oriundos de nosso continente.

## **Agradecimentos**

- (i) Ao meu orientador, Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits, pela assintência e incentivo na elaboração deste trabalho e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.
- (ii) Ao Prof. Dr. Pimentel, C. Tello e H. Blas, pela colaboração e discussões durante o desenvolvimento deste trabalho.
- (iii) À força positiva da natureza (Deus) por ter criado meus pais e irmãs, e à eles pelo seu apoio moral e espiritual.
- (iv) Ao pessoal em geral do IFT-UNESP e em particular à Sra. M. C. Ferreira pelo seu apoio incondicional.
- (v) Finalmente quero agradecer à CAPES pelo apoio financiero.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 TEORIAS CONFORMES.</b>	<b>12</b>
1.1 Teorias conformes em $d$ dimensões. . . . .	12
1.1.1 O grupo conforme em $d$ dimensões. . . . .	12
1.1.2 O grupo conforme. . . . .	15
1.2 Teorias conformes em duas dimensões. . . . .	15
1.2.1 A álgebra conforme em 2 dimensões. . . . .	15
1.2.2 Funções de correlação dos campos primários. . . . .	17
1.2.3 Simetrias, correntes e a expansão do produto de operadores. . . . .	19
<b>2 A TEORIA DE CORDAS COMO UMA TEORIA CONFORME.</b>	<b>23</b>
2.1 Introdução à Teoria de Cordas. . . . .	23
2.2 Simetrias das cordas livres no espaço de Minkowski. . . . .	26
2.3 Quantização BRST para a corda bosônica . . . . .	30
<b>3 TEORIAS SUPERCONFORMES <math>N = 1</math>.</b>	<b>35</b>
3.1 A matemática da Teoria Superconforme $N = 1$ . . . . .	35
3.1.1 Supercoordenadas. . . . .	35
3.1.2 Transformações superconformes. . . . .	36
3.1.3 Geradores superconformes, OPE e expansão em modos. . . . .	38

---

3.2	Campos de matéria para a supercorda $N = 1$ . . . . .	41
3.3	Fantasma superconformes $N = 1$ . . . . .	42
<b>4</b>	<b>TEORIAS SUPERCONFORMES <math>N = 2</math></b>	<b>45</b>
4.1	Supercoordenadas $N = 2$ . . . . .	45
4.2	Ação, OPE's e os geradores superconformes $N = 2$ . . . . .	46
4.3	Fantasma superconformes $N = 2$ . . . . .	50
<b>5</b>	<b>IMERSÃO DAS TEORIAS DE CORDAS <math>N = 0 \subset N = 1 \subset N = 2</math>.</b>	<b>53</b>
5.1	$N = 0 \subset N = 1$ . . . . .	54
5.2	$N = 1 \subset N = 2$ . . . . .	58
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>LAGRANGEANAS DE PRIMEIRA ORDEM NA TEORIA DE CAMPO EM 2 D</b>	<b>68</b>
<b>B</b>	<b>BOSONIZAÇÃO</b>	<b>70</b>
<b>C</b>	<b>COHOMOLOGIA DE BRST</b>	<b>73</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>

# Introdução

Através de décadas procura-se unificar diferentes teorias de cordas e desta maneira ter uma teoria unificada de cordas. Duas teorias de cordas que, num início, são totalmente diferentes e que descreviam dois fenômenos físicos também totalmente diferentes, acabariam sendo vinculadas e descrevendo o mesmo fenômeno através de uma nova teoria de cordas unificada. Em vista disto é importante estudar um mesmo fenômeno com ajuda de diferentes teorias e ver, quando for possível, os vínculos entre estas teorias. No nosso caso em particular veremos que sob certas condições especiais é possível relacionar teorias com zero, uma e duas supersimetrias; o qual nos estaria dizendo diretamente que aumentar supersimetrias a uma dada teoria não estaria acrescentando uma nova física.

Para começar a descrição deste trabalho, diremos que a quantização das teorias de cordas estão baseadas em uma invariância residual, a qual nos mostra que a teoria de cordas em  $1 + 1$  é uma teoria conforme de campo somente na dimensão crítica  $D \equiv \hat{c} = 26$  (ou em termos da carga central  $c \equiv 26$ ) o qual é analisado amplamente nas seguintes referências [1, 2, 3, 4]. Dizer que uma teoria é conforme, significa pois que seus geradores satisfazem a álgebra de Virasoro.

O método usado aqui para quantizar esta teoria de cordas é o de BRST<sup>1</sup>. Esta última é uma simetria rígida que relaciona campos da parte de matéria com os campos fantasmas de Fadeev-Popov [20]. A partir desse método podemos introduzir o conceito de cohomologia de BRST, a qual caracteriza o espaço físico através do operador de BRST. Assim, para determinar

---

<sup>1</sup>Usaremos a prescrição de BRST a nível de operadores [14].

que, um operador qualquer  $A$ , está na comohologia de um operador de BRST este deve ser  $Q$ -fechado ( $[A, Q] = 0$ ), e não deve ser  $Q$ -trivial ( $A \neq [B, Q]$ ).

Tudo o que foi dito anteriormente pode ser generalizado usando a Supersimetria, que é a simetria que relaciona variáveis comuns bosônicas com variáveis fermiônicas.

Seguindo este caminho, é possível construir teorias de cordas com cargas centrais  $c \equiv 15$  e  $c \equiv 6$  que satisfaçam as álgebras superconformes  $N = 1$  e  $N = 2$ , respectivamente.

Devemos notar que as teorias de supercordas ( $N = 1$ ,  $N = 2$ ), assim como a teoria da corda bosônica ( $N = 0$ ), serão somente teorias de cordas superconformes no caso em que estas possuam suas respectivas cargas centrais críticas.

A partir dos fatos anteriores foi proposto, no trabalho de Nathan Berkovits e Cumrun Vafa [5], que para uma dada teoria de corda bosônica, cujo gerador satisfaz a álgebra conforme ( $N = 0$ ) com carga central (crítica) igual a vinte e seis, pode-se construir uma única representação de geradores que satisfazem a álgebra  $N = 1$  com carga central igual a quinze (crítica). De maneira similar, a partir desta última álgebra ( $N = 1, c = 15$ ) pode-se construir uma outra representação única de geradores que satisfaçam a álgebra  $N = 2$  com carga central (crítica) igual a seis. Neste mesmo trabalho foi também demonstrado, a nível de amplitudes de correlação, que os observáveis físicos de ambas teorias estão na mesma cohomologia.

Mas, em vista que o formalismo deste último, o qual nos permite relacionar as teorias de cordas mencionadas, usa operadores "complicados" (que não são matéria de nosso interesse) para mostrar as equivalências entre as amplitudes de espalhamento das teorias mencionadas, torna-se bastante complicado ver que as respectivas álgebras dos operadores são também isomórficas. Assim pois, o método mais direto para verificar se estas álgebras são isomórficas foi dado em [6], onde foi mostrado que o operador de BRST para o caso da supercorda  $N = 1$  é transformado (através de uma transformação de similaridade) em uma soma direta dos operadores de BRST da corda  $N = 0$  e de um setor topológico, demonstrando desta maneira que a cohomologia de BRST para  $N = 1$  será igual a cohomologia de BRST para  $N = 0$ .

Em seguida foi também mostrado, a nível de operadores, que pode-se construir uma transformação de similaridade para o operador de BRST da supercorda  $N = 2$  [7] e demonstrar a equivalência entre as supercordas  $N = 1$  e  $N = 2$ .

Desta maneira podemos ver que a imersão é importante para unificar as teorias de cordas, pois esta nos mostra que os observáveis físicos serão os mesmos, não dependendo de que teoria nós usemos.

Assim pois, para qualquer representação de operadores que satisfaçam a álgebra conforme  $N = 0$  com  $c = 26$  pode-se construir uma única representação dos operadores que satisfaçam a álgebra superconforme  $N = 1$  com carga central  $c = 15$ . De maneira similar, podemos dizer que para qualquer representação de operadores que satisfaçam a álgebra superconforme  $N = 1$  com  $c = 15$  pode-se construir uma única representação dos operadores que satisfaçam a álgebra superconforme  $N = 2$  com carga central  $c = 6$ .

Logo, baseando-se nos fatos anteriores, podemos afirmar que existe a seguinte hierarquia  $N = 0 \subset N = 1 \subset N = 2$ . Como consequência, vemos que a corda com  $N = 2$  simetrias superconformes é a mais geral e contém todas as outras como casos particulares.

Já que nós trabalharemos somente em duas dimensões, então podemos dizer que todo o que foi dito sobre a parte holomórfica será também satisfeito para a parte anti-holomórfica.

A motivação deste trabalho é estudar como funciona o formalismo de BRST, o qual nos permite relacionar estas várias teorias de cordas através de suas álgebras (ou equivalentemente de suas OPE's (1.44) e (1.47)).

No Capítulo 1 fazemos uma pequena descrição da teoria conforme em  $d$  dimensões e logo da teoria em 2 dimensões, a qual é de nosso interesse imediato, baseando-nos principalmente nas referências [1, 2, 3, 4, 9, 11].

No capítulo 2 veremos como a teoria de corda bosônica é uma teoria exatamente conforme na dimensão crítica e pode ser descrita pela teoria conforme de campo [1, 2, 3, 4, 12].

No Capítulo 3 faremos um resumo da teoria superconforme com uma supersimetria ( $N = 1$ ) [14, 15].

No Capítulo 4 faremos um resumo da teoria superconforme com duas supersimetrias ( $N = 2$ ) [16, 17, 19].

No Capítulo 5 é desenvolvido este formalismo a nível de operadores que nos permite interpolar entre as teorias de cordas ( $N = 0 \subset N = 1 \subset N = 2$ ) [5, 6, 7].

# Capítulo 1

## TEORIAS CONFORMES.

### 1.1 Teorias conformes em $d$ dimensões.

#### 1.1.1 O grupo conforme em $d$ dimensões.

As teorias clássicas têm muitas variedades de simetrias. Uma das simetrias existentes é a invariância de coordenadas generalizadas. Se usamos o princípio da mínima ação, pode-se mostrar que o tensor de energia-momento deve ser conservado. Em forma geral, este último é definido como a variação da ação  $S$  em relação à métrica do espaço-tempo

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} . \quad (1.1)$$

A partir daí, definimos o tensor de energia-momento como <sup>1</sup>

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (1.2)$$

Se a teoria é invariante sob as transformações de coordenadas generalizadas, então, pode-se mostrar [13] que

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 , \quad (1.3)$$

onde “ $;\nu$ ” denota uma derivada covariante. Em coordenadas cartesianas a condição anterior será  $\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0$ .

---

<sup>1</sup>Como sempre  $\sqrt{g} \equiv \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$ .

Nós estamos interessados numa simetria que esteja baseada na métrica e no tensor de energia-momento. Com este objetivo, nós consideraremos a seguinte transformação

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow \Omega(x)g_{\mu\nu}(x), \\ \Omega(x) &\equiv e^{\omega(x)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

(invariância de Weyl) ou na forma infinitesimal

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) + \omega(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (1.5)$$

A condição para a invariância de uma ação sob tal simetria, pode ser escrita em termos do tensor de energia-momento. Com este fim substituímos

$$\delta g_{\mu\nu} = \omega(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (1.6)$$

na fórmula (1.2), e encontramos que

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T^\mu{}_\mu \omega(x) = 0, \quad (1.7)$$

e a partir daí, deduzimos que  $T^\mu{}_\mu = 0$ .

O objetivo deste parágrafo é mostrar os vínculos impostos pela invariância conforme na forma mais geral possível. Para isto, consideramos, um espaço de  $d$  dimensões com uma métrica Minkowskiana  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  de assinatura  $(p,q)$  e um elemento de linha  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .

Uma transformação conforme é “definida” como uma transformação de coordenadas, a qual atua sob a métrica como uma transformação de Weyl, ou seja, o grupo conforme é um subgrupo das transformações de coordenadas que conserva a métrica invariante a menos de uma mudança de escala. Em termos matemáticos, esta transformação de coordenadas terá a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}, \quad (1.8)$$

a qual é equivalentemente à equação (1.5) justamente quando  $e^{\omega(x)} \equiv \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$ .

Este último é consequência das transformações de coordenadas que preservam o ângulo  $(\frac{v \cdot \omega}{\sqrt{v^2 \omega^2}})$  invariante entre dois vetores  $v$  e  $\omega$  (onde  $v \cdot \omega = g_{\mu\nu} v^\mu \omega^\nu$ ).

Observe que, o grupo de Poincaré (produto semi-direto das translações e as transformações de Lorentz no espaço plano) forma novamente um subgrupo do grupo conforme, já que este deixa a métrica invariante ( $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ ).

Para determinar todas as transformações conformes no espaço plano, consideraremos a transformação de coordenadas infinitesimais

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (1.9)$$

a transformação geral da métrica

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu - \epsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

a métrica Minkowskiana ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ) e a equação (1.6); então daí, obteremos as seguintes equações :

$$\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \Omega \eta_{\mu\nu} = [1 + \omega(x)] \eta_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

$$\omega(x) = (2/d) \partial^\mu \epsilon_\mu; \quad (1.12)$$

e finalmente deduzimos que

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = (2/d) (\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Também podemos encontrar que

$$[\eta_{\mu\nu} \square + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu] \partial \cdot \epsilon = 0. \quad (1.14)$$

Enfatizamos que o caso de 2 dimensões é especial, sendo que a equação (1.13), é equivalente às condições de Cauchy-Riemann (quando colocamos  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  (métrica Euclidiana) e  $d = 2$ )

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2, \quad (1.15)$$

$$\partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1. \quad (1.16)$$

### 1.1.2 O grupo conforme.

As transformações conformes que satisfazem (1.13) podem ser identificadas como

- \* Translações:  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha^\mu$  ( $\epsilon^\mu$  é de ordem zero em  $x^\mu$ ) ,
- \* Rotações(Lorentz):  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$  ( $\epsilon^\mu$  linear em  $x^\mu$ ) ,
- \* Transformações de escala:  $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$  ( $\epsilon^\mu$  linear em  $x^\mu$ ) ,
- \* Transformações conformes especiais:  $x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$  ( $\epsilon^\mu$  é bilinear em  $x^\mu$ ) .

(1.17)

Para cada transformação  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ , podemos definir um operador diferencial  $O_\epsilon$ , de tal forma que a transformação de uma função  $f(x)$  seja

$$f(x) \rightarrow f(x) + O_\epsilon f(x) . \quad (1.18)$$

Claramente estes operadores serão

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_\mu , \\ M_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) , \\ D &= x^\mu \partial_\mu , \\ K_\mu &= x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Estes operadores estão ligados aos parâmetros  $\alpha^\mu$ ,  $\omega_\nu^\mu$ ,  $\lambda$ ,  $b^\mu$  respectivamente em (1.17).

Sabemos também que P, M, D, K fecham uma álgebra que contém um total de  $p + q + 1/2(p + q)(p + q - 1) + 1 + (p + q) = 1/2(p + q + 1)(p + q + 2)$  geradores.

## 1.2 Teorias conformes em duas dimensões.

### 1.2.1 A álgebra conforme em 2 dimensões.

No caso particular da equação (1.15) e (1.16) é natural reescrever as coordenadas velhas em termos das novas coordenadas complexas

$$z = x_1 + ix_2 ,$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_2 \quad (1.20)$$

juntamente com

$$\begin{aligned} \epsilon(z, \bar{z}) &= \epsilon^1(z, \bar{z}) + i\epsilon^2(z, \bar{z}), \\ \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) &= \epsilon^1(z, \bar{z}) - i\epsilon^2(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Então as equações (1.15) e (1.16) implicam uma dependência holomórfica  $\epsilon \equiv \epsilon(z)$  e anti-holomórfica  $\bar{\epsilon} \equiv \bar{\epsilon}(\bar{z})$ ; por isto as transformações de coordenadas analíticas serão

$$\begin{aligned} z &\rightarrow f(z), \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{f}(\bar{z}), \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde  $f'(z) \neq 0$ .

A partir daí, reescrevemos o elemento de linha em coordenadas complexas  $ds^2 = dz d\bar{z}$ . E depois de usar as transformações holomórficas (1.22), chegaremos na relação

$$dz d\bar{z} \rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dz d\bar{z}. \quad (1.23)$$

Isto significa que nós temos uma transformação conforme, de acordo com a definição (1.4), onde  $\omega(x) = 2 \ln \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|$ .

Por outro lado, para calcular as relações de comutação dos geradores da álgebra conforme, ou seja, a transformação infinitesimal da forma (1.22), nós tomaremos as bases

$$\begin{aligned} z \rightarrow z' &= z + \epsilon_n(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z}' &= \bar{z} + \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) \quad (n \in Z), \end{aligned} \quad (1.24)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_n(z) &= -z^{n+1} \\ \bar{\epsilon}_n(\bar{z}) &= -\bar{z}^{n+1}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Os geradores infinitesimais correspondentes serão

$$\begin{aligned} \ell_n &= -z^{n+1} \partial_z, \\ \bar{\ell}_n &= -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}; \quad (n \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

os quais satisfazem a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} [\ell_m, \ell_n] &= (m - n) \ell_{m+n} \\ [\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] &= (m - n) \bar{\ell}_{m+n}, \\ [\ell_m, \bar{\ell}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Já que os geradores  $\ell_n$ 's e  $\bar{\ell}_m$ 's comutam entre si, então a álgebra conforme local é a soma direta  $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$  de duas subálgebras isomórficas com as relações de comutação (1.27). Em geral podemos ter  $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2$  em lugar de  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , então a transformação para as coordenadas  $z$  e  $\bar{z}$  é justamente uma mudança de variáveis<sup>2</sup>. Por isto, este procedimento permite que a álgebra  $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$  atue naturalmente em  $\mathcal{C}^2$ , e a condição "física"  $\bar{z} = *z$  será imposta ao final de todo o cálculo. Assim, pode-se usar em forma independente as álgebras de  $\mathcal{A}$  e  $\bar{\mathcal{A}}$ , o qual implica a independência anti-holomórfica a qual será ignorada por simplicidade, e logo poderá ser reestabelecida colocando barras nos termos apropriados.

### 1.2.2 Funções de correlação dos campos primários.

O elemento de linha  $ds^2 = dz d\bar{z}$  transforma-se sob  $z \rightarrow f(z)$  como

$$ds^2 \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) ds^2. \quad (1.28)$$

O passo seguinte é generalizar esta lei de transformação para uma função  $\Phi(z, \bar{z})$

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (1.29)$$

<sup>2</sup>Se colocamos a condição  $\bar{z} = *z$  (involução) em  $\mathcal{C}^2$  obteremos novamente  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

onde  $h$  e  $\bar{h}$  têm valores reais <sup>3</sup>. Esta fórmula também é equivalente a dizer que  $\Phi(z, \bar{z})dz^h d\bar{z}^{\bar{h}}$  é invariante. No caso das coordenadas complexas em duas dimensões um tensor  $\Phi_{z_1 \dots z_m \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n}(z, \bar{z})$  com  $m$  índices  $z$  e  $n$  índices  $\bar{z}$  embaixo, se transformará como (1.29) com  $h = m$ ,  $\bar{h} = n$ .

Sob as formas infinitesimais  $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ ,  $\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$ , um campo  $\Phi$  de pesos conformes  $(h, \bar{h})$  satisfaz a propriedade de transformação (1.29) na seguinte maneira

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(z, \bar{z}) = \left( (h\partial\epsilon + \epsilon\partial) + (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}) \right) \Phi(z, \bar{z}), \quad (1.30)$$

onde  $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$ .

Se nós comutamos duas variações, então obteremos

$$\delta_{[\epsilon_1, \epsilon_2]} = [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}], \quad (1.31)$$

onde

$$[\epsilon_1, \epsilon_2] = \epsilon_1 \partial \epsilon_2 - \epsilon_2 \partial \epsilon_1. \quad (1.32)$$

Agora, imponhamos que a função de dois pontos  $\mathcal{G}^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle$ , satisfaça em forma infinitesimal a seguinte equação

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{G}^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \langle \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_1, \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi_2 \rangle = 0, \quad (1.33)$$

em seguida deduzimos a equação de diferenciais parciais

$$\begin{aligned} & \left( \epsilon_1 \partial_1 + h_1 \partial_1 \epsilon_1 + \epsilon_2 \partial_2 + h_2 \partial_2 \epsilon_2 + \bar{\epsilon}_1 \bar{\partial}_1 + \bar{h}_1 \bar{\partial}_1 \bar{\epsilon}_1 \right. \\ & \left. + \bar{\epsilon}_2 \bar{\partial}_2 + \bar{h}_2 \bar{\partial}_2 \bar{\epsilon}_2 \right) \mathcal{G}^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Então quando  $\epsilon(z) = 1$  e  $\bar{\epsilon}(\bar{z}) = 1$  vemos que  $\mathcal{G}^{(2)}$  depende somente de  $z_{12} = z_1 - z_2$ , e  $\bar{z}_{12} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ; depois usamos também que  $\epsilon = z$  e  $\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z}$  exigindo que  $\mathcal{G}^{(2)} = \frac{C_{12}}{z_{12}^{h_1+h_2} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}}$ ; e finalmente  $\epsilon(z) = z^2$  e  $\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z}^2$  exigindo que  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h}$ .

O resultado de todos estes vínculos implica que a função de dois pontos tem a seguinte forma

$$\mathcal{G}^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h} \bar{z}_{12}^{2\bar{h}}}. \quad (1.35)$$

<sup>3</sup>Em geral  $\bar{h}$  não é o complexo conjugado de  $h$ .

### 1.2.3 Simetrias, correntes e a expansão do produto de operadores.

Os geradores de simetrias, podem ser construídos em geral via a prescrição de Noether. Uma teoria quântica de  $d$  dimensões que possui uma simetria exata, tem uma corrente conservada associada  $j^\mu$ ; esta última satisfaz a seguinte equação  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

A carga conservada  $Q = \int d^{d-1} x j_0(x)$ , a qual é construída integrando em uma fatia do tempo fixo, gera uma variação de simetria infinitesimal em qualquer campo  $\Psi$ , de acordo com a fórmula  $\delta_\epsilon \Psi = \epsilon[Q, \Psi]$ .

Em particular, uma transformação de coordenadas locais são geradas por cargas que são construídas a partir do tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  (este último é em geral um tensor simétrico).

Nas teorias invariantes conformes,  $T_{\mu\nu}$  tem traço nulo como podemos conferir na fórmula (1.7). Isto vem da exigência da conservação da corrente  $0 = \partial \cdot j = T^\mu{}_\mu$ . No caso da corrente de dilatações temos que  $j_\mu = T_{\mu\nu} x^\nu$  (este tensor está associado a uma transformação de escala ordinária  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \lambda x^\mu$ ).

A corrente associada à outra transformação conforme infinitesimal é  $j_\mu = T_{\mu\nu} \epsilon^\nu$ , onde  $\epsilon^\mu$  satisfaz (1.14). Esta corrente também tem uma divergência que desaparece automaticamente,  $\partial \cdot j = \frac{1}{2} T^\mu{}_\mu (\partial \cdot \epsilon) = 0$ , já que  $T_{\mu\nu}$  tem traço nulo.

Para encontrar nossas cargas conservadas no plano conforme  $z$ , introduzimos a análise tensorial complexa necessária. O espaço Euclidiano plano ( $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ) em coordenadas complexas " $z = x + iy$ " (1.20), tem um elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 = dz d\bar{z}, \quad (1.36)$$

então os componentes da métrica no sistema complexo de coordenadas serão  $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$  e  $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}$ . Neste sistema os componentes do tensor energia-momento serão

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}), \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}), \end{aligned}$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = \frac{1}{4}T^\mu{}_\mu. \quad (1.37)$$

A lei de conservação da corrente  $g^{\alpha\mu}\partial_\alpha T_{\mu\nu} = 0$  nos dá duas relações ,

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (1.38)$$

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0. \quad (1.39)$$

Se usamos a condição de traço nulo, estas últimas equações implicam que

$$\partial_{\bar{z}}T_{zz} = 0,$$

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (1.40)$$

Então veremos que os dois componentes do tensor energia-momento diferentes de zero serão

$$T(z) \equiv T_{zz}(z),$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}), \quad (1.41)$$

e por tanto vemos que existe dependências divididas em duas regiões (holomórficas e anti-holomórficas). É natural esperar que o tensor de energia-momento tenha duas partes ( $T$  e  $\bar{T}$ ) as quais geram transformações locais conformes no plano  $z$  e  $\bar{z}$ , como já se tinha estabelecido em (1.27).

Em seguida acharemos várias propriedades das teorias conformes no plano complexo  $z$  e  $\bar{z}$ . Por exemplo, para quantizar radialmente, devemos tomar a integral dos componentes da corrente ortogonal a uma superfície em tempos iguais (raios constantes) da seguinte maneira  $\int j_0(x)dx \rightarrow \int j_r(\theta)d\theta$  (onde  $r$  e  $\theta$  representam o raio e o ângulo em duas dimensões complexas). Desta maneira teremos a seguinte carga conservada

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz T(z)\epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})). \quad (1.42)$$

A integração de  $dz$  e  $d\bar{z}$  é tomada sob um círculo de raio constante, onde nossa convenção de sinais é tomada em sentido anti-horário.

A variação de um campo (como foi estabelecido no começo desta subseção) está dado pelo comutador deste com a carga (1.42) a tempos iguais e é representado pela seguinte fórmula

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(\omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi i} \oint [dz T(z) \epsilon(z), \Phi(\omega, \bar{\omega})] + [d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}), \Phi(\omega, \bar{\omega})]. \quad (1.43)$$

Então, o produto de operadores (OPE)  $A(z)B(\omega)$  será somente definido no espaço Euclidiano de quantização radial. Desta maneira definimos a operação de ordenamento radial  $R$  como

$$R(A(z)B(\omega)) = \begin{cases} A(z)B(\omega) & , se |z| \geq |\omega| \\ B(\omega)A(z) & , se |z| \leq |\omega|, \end{cases} \quad (1.44)$$

ou com sinal menos, no caso dos operadores fermiônicos.

O comutador a tempos iguais de um operador local  $A$  com a integral espacial de um operador  $B$  será uma integral de contorno do produto ordenado radialmente<sup>4</sup>,

$$\left[ \int dx B, A \right]_{T.I.} \rightarrow \oint dz R(B(z)A(\omega)). \quad (1.45)$$

Então nós podemos reescrever (1.43) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(\omega, \bar{\omega}) &= \lim_{|z| \rightarrow |\omega|} \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{|z| \geq |\omega|} - \oint_{|z| \leq |\omega|} \right) (dz \epsilon(z) R(T(z) \Phi(\omega, \bar{\omega})) + d\bar{z} \bar{\epsilon} R(\bar{T}(\bar{z}) \Phi(\omega, \bar{\omega}))) \\ &= \lim_{|z| \rightarrow |\omega|} \frac{1}{2\pi i} \oint (dz \epsilon(z) R(T(z) \Phi(\omega, \bar{\omega})) + d\bar{z} \bar{\epsilon} R(\bar{T}(\bar{z}) \Phi(\omega, \bar{\omega}))) \\ &= h \partial \epsilon(\omega) \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \epsilon(\omega) \partial \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \bar{h} \bar{\partial} \bar{\epsilon}(\bar{\omega}) \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \bar{\epsilon}(\bar{\omega}) \bar{\partial} \Phi(\omega, \bar{\omega}), \end{aligned} \quad (1.46)$$

onde nesta última linha substituímos o resultado da equação (1.29) para o caso de uma transformação infinitesimal  $f(z) = z + \epsilon(z)$ .

Em vista de que a carga (1.42) induz uma transformação conforme infinitesimal correta, inferimos que as singularidades a pequenas distâncias de  $T$  e  $\bar{T}$  com  $\Phi$  poderiam ser

$$\begin{aligned} R(T(z) \Phi(\omega, \bar{\omega})) &= \frac{h}{(z - \omega)^2} \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{z - \omega} \partial_{\omega} \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \dots \\ R(\bar{T}(\bar{z}) \Phi(\omega, \bar{\omega})) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{\omega}} \bar{\partial}_{\bar{\omega}} \Phi(\omega, \bar{\omega}) + \dots \end{aligned} \quad (1.47)$$

<sup>4</sup>T.I. - Tempos iguais.

Vemos que a lei de transformação (1.29) para campos primários nos leva às expansões do produto de operadores (OPE) em distâncias curtas obtidas do tensor de energia-momento holomórfico e anti-holomórfico com um campo primário. Logo, a OPE que define o conceito de um campo primário é definida como

$$T(z)\Phi(\omega, \bar{\omega}) = \frac{h}{(z - \omega)^2}\Phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{z - \omega}\partial_\omega\Phi(\omega, \bar{\omega}) + \dots \quad (1.48)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\Phi(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2}\Phi(\omega, \bar{\omega}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{\omega}}\bar{\partial}_{\bar{\omega}}\Phi(\omega, \bar{\omega}) + \dots, \quad (1.49)$$

onde aqui está codificado as propriedades da transformação conforme de  $\Phi$ . Em geral, quando dois operadores  $A(z)$  e  $B(\omega)$  se aproximam um do outro, a OPE de Wilson [3, 11] toma a forma

$$A(z)B(\omega) = \sum_{\Delta} C_{\Delta}(z - \omega)O_{\Delta}(\omega), \quad (1.50)$$

onde  $\{O_{\Delta}(\omega)\}$  é um conjunto completo de operadores locais, e os  $C_{\Delta}$ 's são coeficientes numéricos singulares. As equações semelhantes a (1.50) devem ser válidas quando o produto  $A(z)B(\omega)$  é colocado dentro da função de Green junto com outros operadores elementares da teoria ou seja:

$$\lim_{z \rightarrow \omega} \langle R \{ A(z)B(\omega) - \sum_{\Delta} C_{\Delta}(z - \omega)O_{\Delta}(\omega) \} \Phi_1(\omega_1) \dots \Phi_M(\omega_M) \rangle = 0. \quad (1.51)$$

Os demais termos regulares na equação (1.48) dependem dos novos campos locais chamados de campos dêcendentes ou campos secundários em relação a  $\Phi$  o qual tem dimensão conforme  $h$ , como podemos comprovar na equação (1.48).

## Capítulo 2

# A TEORIA DE CORDAS COMO UMA TEORIA CONFORME.

### 2.1 Introdução à Teoria de Cordas.

Para descrever o movimento de uma corda é conveniente introduzir um parâmetro de evolução de tipo tempo “ $\tau$ ”, isto pode ser interpretado como um tipo de “coordenada temporal” para um observador sentado na posição  $\sigma$  ao longo da corda.

Como a corda propaga-se no espaço-tempo, esta por sua vez, varre a “folha-mundo” (a generalização da linha-mundo para uma partícula pontual), a qual é descrita matematicamente, especificando a posição da corda  $X^\mu(\tau, \sigma)$  nos valores dados de  $\tau$  e  $\sigma$ <sup>1</sup>.

Nambu e Goto, escreveram pela primeira vez a ação da corda imersa no espaço de Minkowski (simplesmente proporcional à área de sua folha-mundo), a qual está representada através da seguinte fórmula<sup>2</sup>

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (2.1)$$

onde

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau}; \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma}. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Neste capítulo usaremos a métrica Minkowskiana, por este motivo mudaremos as definições anteriores como  $z \rightarrow +$  e  $\bar{z} \rightarrow -$ .

<sup>2</sup>Neste e nos seguintes capítulos usaremos  $\hbar \equiv 1$ ,  $c \equiv 1$ ,  $\alpha' \equiv \frac{1}{2}$ .

Se a ação da corda é tomada para ser a área da folha-mundo, então as soluções das equações clássicas da corda livre devem ser folhas-mundo de áreas mínimas (extremais). Já que (2.1) não é linear, então é muito difícil trabalhar com ela, por isto é conveniente introduzir além da coordenada  $X^\mu(\tau, \sigma)$  uma nova variável  $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ , a qual representa a métrica da folha-mundo da corda. A forma mais conveniente foi introduzido por Poliakov

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu . \quad (2.3)$$

onde  $\sqrt{|h|}$ <sup>3</sup> é a raiz quadrada do valor absoluto do determinante de  $h_{\alpha\beta}$  e  $h^{\alpha\beta}$  é a inversa de  $h_{\alpha\beta}$ . Já que as derivadas de  $h_{\alpha\beta}$  não aparecem em (2.3) isto significa que sua equação de movimento é uma equação vinculada e  $h$  pode ser eliminada (ou vinculada, se desejamos), obtendo desta maneira novamente a equação (2.1). Classicamente (2.3) descreve a propagação de uma corda no espaço de Minkowski em qualquer dimensão, mas quântico-mecanicamente, o caso mais interessante o teremos em 26 dimensões.

Vemos que ambas (2.1) e (2.3) são invariantes sob uma transformação de coordenadas gerais da folha-mundo da corda,

$$\tau, \sigma \rightarrow \tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma) , \quad (2.4)$$

no caso de (2.3) a métrica da folha-mundo  $h_{\alpha\beta}$  transforma-se sob tal transformações de acordo com a lei de transformação padrão de um tensor métrico. Do ponto de vista de uma dimensão e para quem vive na corda, (2.1) e (2.3) descrevem uma teoria de campo (que é geralmente covariante) em 1 + 1 dimensões. Nesta teoria de campo de 1 + 1 dimensões, o campo  $X^\mu$  é visto como um campo escalar. Estes campos transformam-se como vetores sob as transformações de Poincaré em 26 dimensões, mas como escalares sob as reparametrizações da folha-mundo. Na realidade (2.3) é a forma padrão de acoplar campos escalares não masivos  $X_\mu$  com a gravidade em 1 + 1 dimensões.

---

<sup>3</sup> $\sqrt{|h|}$  foi especificada em (1.2)

A invariância sob as reparametrizações da folha-mundo serve essencialmente para resolver as equações da superfície mínima, as quais são derivadas de (2.3). O tensor simétrico  $h_{\alpha\beta}$  de  $2 \times 2$  contém três componentes independentes.

Em 2 dimensões uma transformação de coordenadas gerais (2.4), depende de duas funções livres, em outras palavras, podemos dizer que ela depende das duas novas coordenadas  $\sigma'$  e  $\tau'$ . A partir daí vemos que, esta transformação pode ser usada para eliminar duas das três componentes de  $h$ . A escolha conveniente e padrão é a reparametrização da folha-mundo tal como

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} e^\phi, \quad (2.5)$$

onde  $\eta_{\alpha\beta}$ <sup>4</sup> é a métrica plana da folha-mundo e  $e^\phi$  é um *fator conforme*<sup>5</sup> desconhecido. Sempre é possível fazer uma escolha pelo menos localmente, esta escolha será chamada de gauge conforme.

A partir daqui, veremos que felizmente no gauge conforme, o fator conforme  $e^\phi$  é cancelado de (2.3), já que em duas dimensões  $\sqrt{h}$  é proporcional a  $e^\phi$ , mas  $h^{\alpha\beta}$  é proporcional a  $e^{-\phi}$ .

Portanto, no gauge conforme (2.3) toma a forma de uma ação de campo livre simples

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (2.6)$$

A equação de movimento derivada de (2.3) é uma equação linear simples

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0. \quad (2.7)$$

Mas, a equação de onda derivada da ação com gauge fixo (2.6) pode ser complementada com algumas equações vinculadas. As equações vinculadas que aparecem são as equações

$$\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0. \quad (2.8)$$

<sup>4</sup> $\eta_{\alpha\beta}$  - Métrica Minkoskiana definido em 2.15.

<sup>5</sup>definido no capítulo 1

## 2.2 Simetrias das cordas livres no espaço de Minkowski.

Agora analizaremos as simetrias da equação (2.3). Esta possui simetrias locais independente da escolha do background. Estas são as invariâncias de reparametrização

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \\ \delta h^{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma},\end{aligned}\quad (2.9)$$

e o reescalamento de Weyl

$$\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Juntamente existem simetrias globais que refletem a simetria do background dentro do qual a corda está propagando-se. Para o caso do espaço plano de Minkowski, esta é a invariância de Poincaré, que está descrita por

$$\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu \quad (2.11)$$

e

$$\delta h^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.12)$$

onde  $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} a_\nu^\rho$  é anti-simétrico ( $\eta_{\mu\rho}$  é a métrica de Minkowski). Especificamos que  $\xi^\alpha$  e  $\Lambda$  são funções arbitrárias infinitesimais de  $\sigma^\alpha$ , e também que  $a_{\mu\nu}$  e  $b^\mu$  são constantes.

Em seguida analizamos a fixação de gauge clássica e covariante. Vemos que o tensor de energia-momento está dado pela derivada variacional de  $S$  (2.3) com relação à métrica  $h^{\alpha\beta}$  de duas dimensões, assim pois

$$T_{\alpha\beta} = -2\pi \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (2.13)$$

A partir desta última encontraremos

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu. \quad (2.14)$$

A consequência da simetria de Weyl é que a soma da diagonal deste tensor é zero  $h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 0$ . As equações (2.8) e (2.13) implicam que  $T_{\alpha\beta} = 0$ .

A dinâmica e a quantização da corda (ver o apêndice B) está baseada na escolha de um gauge conveniente. As três simetrias locais mencionadas anteriormente (duas invariâncias de reparametrização e um reescalamento de Weyl) são usadas para escolher os três elementos independentes da métrica  $g_{\alpha\beta}$ , assim

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

é a métrica de Minkowski de duas dimensões.

Logo de ter feito a escolha conveniente, nós obteremos da equação (2.6) a equação de onda livre (a equação Euler-Lagrange) em duas dimensões

$$\square X^\mu \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0. \quad (2.16)$$

A solução geral para a equação de onda sem massa em duas dimensões pode ser escrita como a soma de duas funções arbitrárias

$$X^\mu(\sigma) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+), \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma^- &= \tau - \sigma \\ \sigma^+ &= \tau + \sigma \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $X_R^\mu$  descreve os modos da corda que se “movem à direita” e  $X_L^\mu$  descreve os modos que se “movem à esquerda”.<sup>6</sup>

As derivadas em relação as variáveis  $\sigma^\pm$  são definidas por

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \quad (2.19)$$

---

<sup>6</sup>Já que  $X_R$  e  $X_L$  são funções somente de  $\sigma^-$  e  $\sigma^+$  respectivamente, é vantajoso introduzir as coordenadas do “cone de luz”  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  para a folha-mundo.

e o tensor métrico Minkowskiano da folha-mundo será

$$\begin{aligned}\eta_{+-} &= \eta_{-+} = -\frac{1}{2}, \\ \eta_{++} &= \eta_{--} = 0,\end{aligned}\tag{2.20}$$

desta maneira o inverso do tensor métrico será  $\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2$ .

Os índices da folha-mundo são levantados e abaixados em acordo com a seguinte regra  $t^+ = -2t_-$ ,  $t^- = -2t_+$ .

A equação de onda (2.16) deve ser complementada com as equações vínculos  $T_{\alpha\beta} = 0$ . Nestas novas coordenadas, este último toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}T_{10} = T_{01} &= \dot{X} \cdot X' = 0, \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde  $\dot{X} \cdot X'$  representa  $\dot{X}^\mu X'_\mu$ .

No sistema de coordenadas  $\sigma^\pm$  o tensor de energia-momento  $T_{\alpha\beta}$  terá a seguinte forma

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X,\tag{2.22}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X.\tag{2.23}$$

Já que o tensor de energia-momento não tem traço, ( $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$ ), obteremos as relações  $T_{+-} = T_{-+} = 0$  (equivalente à relação (2.21)).

Usando os fatos anteriores, as equações vinculadas  $T_{++} = T_{--} = 0$  estabelecem a seguinte condição

$$\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0.\tag{2.24}$$

Na teoria do campo quântico em duas dimensões, a lei de conservação do tensor energia-momento  $T$  toma a seguinte forma geral  $\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = 0$ , e  $\partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} = 0$ .

No caso da invariância conforme,  $T_{+-} = 0$ , a conservação do tensor de energia-momento reduz-se à

$$\partial_- T_{++} = 0.\tag{2.25}$$

Esta afirmação é muito importante, pois corresponde à existência de um conjunto infinito de quantidades conservadas.

Seja  $f(x^+)$  uma função de  $x^+$  (como consequência  $\partial_- f = 0$ ). Então (2.25) implica que a corrente  $fT_{++}$  é conservada,  $\partial_-(fT_{++}) = 0$ . A carga  $Q_f = \int d\sigma f(x^+)T_{++}$  é da mesma maneira conservada. Já que  $f$  é arbitrária, existe um conjunto infinito de quantidades conservadas. Estas quantidades conservadas, que justamente nós achamos, são os vínculos em (2.24). Uma vez que estas são conservadas podemos colocar elas iguais a zero; se elas desaparecem em um tempo inicial, então desaparecerão nos tempos posteriores. Este último comentário é uma consequência, que é válido para qualquer teoria invariante conforme em duas dimensões.

No caso da teoria de cordas estas quantidades conservadas correspondem às simetrias residuais, que subsistem depois de fixar o gauge. Como é típico na escolha de gauge covariantes ( $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ ), os graus de liberdade não são esgotados completamente.

Para ver melhor o dito anteriormente, usamos junto (2.9) com (2.10) e comprovamos que qualquer reparametrização combinada com uma escala de Weyl sob a forma

$$\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

preserva a escolha de gauge. Se introduzimos as seguintes combinações  $\xi^\pm = (\xi^0 \pm \xi^1)$ , a simetria residual implica que  $\xi^+$  pode ser uma função arbitrária de  $\sigma^+ = (\tau + \sigma)$  e que  $\xi^-$  pode ser outra função arbitrária de  $\sigma^- = \tau - \sigma$ . Se nós imaginarmos que as reparametrizações da folha-mundo  $\delta\sigma^\alpha = \xi^\alpha$  são geradas pelo operador  $G = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\sigma^\alpha}$ , então os geradores das simetrias residuais serão

$$\begin{aligned} G^+ &= \xi^+(\sigma^+) \frac{\partial}{\partial\sigma^+}, \\ G^- &= \xi^-(\sigma^-) \frac{\partial}{\partial\sigma^-}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Somente em duas dimensões o grupo conforme tem dimensões infinitas. Então (2.27) com  $f^+ \sim \xi^+$  gerarão as cargas conservadas no setor holomórfico.

Para concluir mencionaremos que é conveniente definir a expansão de Laurent do tensor

de energia-momento (2.22) em termos de modos da seguinte maneira

$$T(z) = T_{++} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n, \quad (2.28)$$

e depois de inverter formalmente esta relação obteremos

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z). \quad (2.29)$$

Logo se usarmos o procedimento de fazer contato entre o produto de dois operadores locais (1.49) e calcularmos o comutador de dois operadores em termos de seus modos e obteremos

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad (2.30)$$

onde  $c$  é a carga central do termo anômalo e que aparece a nível quântico a diferença da álgebra (1.27), esta última é conhecida como a álgebra de Virasoro.

## 2.3 Quantização BRST para a corda bosônica

A ação da teoria de campo livre (2.3)

$$S[h, X] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \partial_\alpha X_\mu, \quad (2.31)$$

complementada com vínculos nos dá a teoria de campo livre com gauge fixo (2.6)

$$S_0[X] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu. \quad (2.32)$$

Nosso trabalho aqui será tentar quantizar a teoria (2.31) através dos mesmos métodos usados para quantizar qualquer outra teoria de gauge, com este fim escrevemos a integral de caminho

$$Z = \int Dh(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h,X]}. \quad (2.33)$$

Onde  $\int Dh(\sigma)$  representa uma integral sobre três componentes independentes  $h_{++}(\sigma)$ ,  $h_{--}(\sigma)$ ,  $h_{+-}(\sigma)$ . O seguinte passo será aplicar a esta última expressão as técnicas de Faddeev-Popov com o fim de interpretar a função de partição de uma teoria de gauge.

Vemos que em (2.33) existem três invariâncias de gauge, três reparametrizações e uma invariância de Weyl (escala), agora desejamos escolher uma faixa de gauge que faça uma escolha particular para cada uma das três funções em  $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ .

A escolha de gauge usual

$$h_{\alpha\beta} = e^{\phi} \eta_{\alpha\beta} , \quad (2.34)$$

em termos das coordenadas do cone de luz significam

$$h_{++} = 0 = h_{--} . \quad (2.35)$$

Sob a reparametrização da folha-mundo,

$$\begin{aligned} \sigma^+ &\rightarrow \sigma^+ + \xi^+ , \\ \sigma^- &\rightarrow \sigma^- + \xi^- , \end{aligned} \quad (2.36)$$

as condições de gauge (2.35) transformam-se como

$$\begin{aligned} \delta h_{++} &= 2\nabla_+ \xi_+ , \\ \delta h_{--} &= 2\nabla_- \xi_- . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Lembramos de (2.9) que o tensor métrico sob uma transformação de coordenadas infinitesimal tem a seguinte forma:

$$\delta h_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha , \quad (2.38)$$

onde  $\nabla$  é a derivada covariante que inclui a conexão de Christoffel,  $\nabla_\alpha \xi_\beta \equiv \partial_\alpha \xi_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \xi_\gamma$ .

O determinante de Fadeev-Popov aparece porque não podemos simplesmente introduzir o gauge conforme (2.34) dentro da integral funcional já que este contribuiria com uma medida incorreta. De fato, a inserção correta do gauge conforme está dado pelo número um:

$$1 = \Delta_{FP} \int D\xi_\alpha \delta(h_{ab}(\xi) - e^{\phi} \eta_{ab}) . \quad (2.39)$$

Se “ $G$ ” é o grupo de reparametrizações da folha-mundo da corda “ $\Sigma$ ”, “ $Dg$ ” é a integração sobre a variedade do grupo e “ $h^g$ ” é a métrica obtida depois de realizar uma transformação de reparametrização “ $g$ ” na métrica  $h$ , então logo que passar para as coordenadas do cone de luz inserimos na “integral de caminho” a identidade (2.40) na forma

$$1 = \int Dg(\sigma) \delta(h_{--}^g) \delta(h_{++}^g) \det\left(\frac{\delta h_{++}^g}{\delta g}\right) \det\left(\frac{\delta h_{--}^g}{\delta g}\right). \quad (2.40)$$

Os fatores  $\det\left(\frac{\delta h_{++}^g}{\delta g}\right)$ ,  $\det\left(\frac{\delta h_{--}^g}{\delta g}\right)$  são os determinantes comuns de fixação de gauge, os quais necessitamos para que a integral realmente seja igual a um. O seguinte passo na fixação de gauge das integrais de caminho é inserir este “1” na forma (2.40) na integral de caminho (2.33). Então obtemos

$$Z = \int Dg(\sigma) \int Dh(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h,X]} \delta(h_{--}^g) \delta(h_{++}^g) \det\left(\frac{\delta h_{++}^g}{\delta g}\right) \det\left(\frac{\delta h_{--}^g}{\delta g}\right). \quad (2.41)$$

Considerando que a ação  $S$  é invariante de reparametrizações,  $S[h, X] = S[h^g, X]$ , deduzimos que o integrando em (2.41) depende de  $h$  e  $g$  através da combinação de  $h^g$ . Por esta razão fazemos uma mudança de variáveis de integração de  $g$  e  $h$  para  $g$  e  $h' \equiv h^g$ , e desprezamos a integral “ $\int Dg$ ” (esta contribui com um fator infinito). Desta maneira obtemos a integral de caminho com gauge fixo

$$Z = \int Dh'(\sigma) DX(\sigma) e^{-S[h',X]} \delta(h'_{--}) \delta(h'_{++}) \det\left(\frac{\delta h'_{++}}{\delta g}\right) \det\left(\frac{\delta h'_{--}}{\delta g}\right). \quad (2.42)$$

As funções delta nos dizem que a integral “ $\int Dh'$ ” reduz-se a uma integral sobre  $h'_{+-}$  ou de maneira equivalente sobre  $\phi$  que está definida em (2.34). A maneira usual de representar os determinantes de (2.42) é através de integrais sobre “fantasmas” e “anti-fantasmas” anticomutantes. As fórmulas indispensáveis podem ser determinadas da fórmula (2.37) como  $\frac{\delta h'_{++}}{\delta g} = \frac{\delta h'_{++}}{\delta \xi_+}$  e  $\frac{\delta h'_{--}}{\delta g} = \frac{\delta h'_{--}}{\delta \xi_-}$ . Daqui obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta h'_{++}(\sigma)}{\delta \xi_+(\sigma')} &= \nabla_+ \delta(\sigma - \sigma'), \\ \frac{\delta h'_{--}(\sigma)}{\delta \xi_-(\sigma')} &= \nabla_- \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (2.43)$$

A função  $\delta$  em (2.43) é justamente o operador identidade no espaço das coordenadas. O determinante deste operador é necessário em (2.42). Assim para determinar o primeiro determinante em (2.42) nós definimos os “fantasmas”  $c^-$  e os “anti-fantasmas”  $b_{--}$  e escrevemos

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\delta h'_{++}}{\delta g}\right) &= \int Dc^-(\sigma)Db_{--}(\sigma)\exp^{-S_{FP}}, \\ S_{FP} &\equiv \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma c^-\nabla_+b_{--}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A segunda integral em (2.42) é introduzida através de uma integral sobre os fantasmas  $c^+$  e  $b_{++}$ ,

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\delta h'_{--}}{\delta g}\right) &= \int Dc^+(\sigma)Db_{++}(\sigma)\exp^{-S_{FP}}, \\ S_{FP} &\equiv \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma c^+\nabla_-b_{++}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por último usando a função delta em (2.42) para substituir  $h$  em termos do fator conforme  $\phi$ , a integral de caminho com gauge fixo é

$$Z = \int D\phi(\sigma)\int DX(\sigma)Dc(\sigma)Db(\sigma)\exp^{-S(X,b,c)}, \quad (2.46)$$

onde a ação contém termos de fantasmas definidos em (2.44) e (2.45) em complemento à ação de campos livres (2.32). O desacoplamento do campo escalar  $\phi$  do integrando em (2.46) existe somente em 26 dimensões onde as anomalias conformes são canceladas.

Em seguida podemos dizer que a lagrangeana total, considerando (2.32), (2.44) e (2.45) será

$$L = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\partial_z X^\mu\partial_{\bar{z}}X_\mu + b\partial_{\bar{z}}c + \bar{b}\partial_z\bar{c}\right). \quad (2.47)$$

Notamos que esta lagrangeana é invariante sob a seguintes transformações

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \epsilon[c\partial_z X^\mu + \bar{c}\partial_{\bar{z}}X_\mu], \\ \delta c &= \epsilon[c\partial_z c], \\ \delta \bar{c} &= \epsilon[\bar{c}\partial_{\bar{z}}\bar{c}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta b &= \epsilon [c \partial_z b + 2 \partial_z c b - \frac{1}{2} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu], \\ \delta \bar{b} &= \epsilon [\bar{c} \partial_z \bar{b} + 2 \partial_z \bar{c} \bar{b} - \frac{1}{2} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu].\end{aligned}\quad (2.48)$$

A partir destas variações e juntando a equação

$$J_\alpha^\mu = \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} \frac{\delta \phi}{\delta \epsilon}, \quad (2.49)$$

onde  $\epsilon$  um certo parâmetro infinitesimal  $\delta \phi = \frac{\delta \phi}{\delta \epsilon} \delta \epsilon$ , nós encontraremos o operador nilpotente de BRST  $Q$ .

Em geral, dada uma álgebra com as relações de comutação  $[G_m, G_n] = f_{mn}^q G_q$ , é possível construir um operador de BRST nilpotente  $Q$  [20] a partir dos operadores anticomutantes  $c_n$  e  $b_m$

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \left[ G_n - \frac{1}{2} f_{mn}^q c_{-m} b_q \right], \quad (2.50)$$

onde

$$[c_n, b_m] = \delta_{n,-m}. \quad (2.51)$$

Desta maneira o nosso operador de BRST pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned}Q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n} (L_n^X + \frac{1}{2} L_n^{ft} - a \delta_{n,0}) : \\ &= c_0 (L_0 - a) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{-n} L_n + L_{-n} c_n] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{m+n} : ,\end{aligned}\quad (2.52)$$

onde  $L_n^X$  é o gerador de Virasoro que depende de  $X$ , e  $L_n^{ft}$  é a contribuição do fantasma ao gerador. Nas equações anteriores existem dois parâmetros que não estão especificados, estes são o valor de  $a$  e a dimensão do espaço-tempo. Da condição de que

$$Q^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{D}{12} (m^3 - m) + \frac{1}{6} (m - 13m^3) + 2am \right) c_m c_{-m} = 0, \quad (2.53)$$

obtemos que  $D = 26$  e  $a = 1$ .

## Capítulo 3

# TEORIAS SUPERCONFORMES

$$N = 1.$$

### 3.1 A matemática da Teoria Superconforme $N = 1$ .

#### 3.1.1 Supercoordenadas.

Neste capítulo veremos como a teoria de campos superconforme combina a teoria de campos conformes com a supersimetria. Uma supervariiedade complexa de uma dimensão (na parte holomórfica), é localmente descrito pela coordenada ordinária e complexa  $z$  e a coordenada anticomutante  $\theta$ ;  $\theta^2 = 0$ , formando a supercoordenada complexa

$$\mathbf{z} = (z, \theta). \quad (3.1)$$

A superderivada é a raiz quadrada de uma derivada ordinária <sup>1</sup>:

$$D = \partial_\theta + \theta \partial_z, \quad (3.2)$$

$$D^2 = \partial_z. \quad (3.3)$$

Uma função superanalítica satisfaz a relação  $\bar{D}f = 0$  <sup>2</sup> e está formada por duas funções analíticas ordinárias:  $f(\mathbf{z}) = f_0(z) + \theta f_1(z)$ , onde  $f_0$  comuta com  $\theta$  e  $f_1$  anticomuta com  $\theta$ .

---

<sup>1</sup> $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial$ ;  $\partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \bar{\partial}$ ;  $\partial_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}$ ;  $\partial_{\bar{\theta}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}$ .

<sup>2</sup> $\bar{D} \equiv \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta} \partial_{\bar{z}}$ .

Em seguida podemos também definir as diferenças de coordenadas, na parte  $(z, \theta)$ , como

$$\begin{aligned} z_{12} &= z_1 - z_2 - \theta_1 \theta_2 ; \\ \theta_{12} &= \theta_1 - \theta_2 , \end{aligned} \quad (3.4)$$

as quais satisfazem as superderivadas

$$D_1 z_{12} = D_2 z_{12} = \theta_{12} . \quad (3.5)$$

Por exemplo, a integração de contorno e o Teorema de Cauchy também tem análogos na teoria superconforme  $N = 1$ . Depois de definir  $f d\theta\theta = 1$ ,  $f d\theta = 0$ , obteremos

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz_1}{2\pi i} f(\mathbf{z}_1) \theta_{12} z_{12}^{-n-1} &= \frac{1}{n!} \partial_2^n f(z_2, \theta_2) , \\ \oint \frac{dz_1}{2\pi i} f(\mathbf{z}_1) z_{12}^{-n-1} &= \frac{1}{n!} \partial_2^n D_2 f(z_2, \theta_2) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Transformações superconformes.

Nos limitaremos somente na parte analítica  $(z, \theta)$  com o único interesse de evitar a “repetição”<sup>3</sup>, então neste caso, o mapeamento analítico  $\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = (\tilde{z}(z, \theta), \tilde{\theta}(z, \theta))$  transforma a superderivada de acordo com a seguinte relação

$$D = D\tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + D\tilde{\theta} \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - D\tilde{\theta} \tilde{\theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + D\tilde{z} \tilde{D}^2 \quad (3.7)$$

$$= (D\tilde{\theta})\tilde{D} + (D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta})\tilde{D}^2 . \quad (3.8)$$

Um mapeamento superanalítico é chamado de uma transformação superconforme quando a superderivada tranforma-se homogeneamente:

$$D = (D\tilde{\theta})\tilde{D} , \quad (3.9)$$

em outras palavras quando

$$(D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta})\tilde{D}^2 = 0 . \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>A parte antianalítica é similar.

Como consequência vemos que uma composição de transformações superconformes

$$\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{z}}}, \quad (3.11)$$

é também uma transformação superconforme. As super-superfícies de Riemann podem ser definidas como uma coleção de pequenas regiões de coordenadas superconformais, ou seja, como um conjunto de pequenas vizinhanças de supercoordenadas relacionadas pelas transformações superconformes. Uma vizinhança de supercoordenada é justamente uma vizinhança ordinária em  $z$ . Por isto nós podemos dizer que (3.11) origina um jacobiano da seguinte forma

$$D\tilde{\tilde{\theta}} = (D\tilde{\theta})(D\tilde{\theta}). \quad (3.12)$$

Esta lei de composição nos permite definir o superdiferencial  $d\mathbf{z}$  por uma lei de transformação

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\mathbf{z}} = D\tilde{\theta}. \quad (3.13)$$

Os campos tensoriais superconformes  $\phi(\mathbf{z})$ , podem ser definidos pela condição que  $\phi(\mathbf{z})d\mathbf{z}^{2h}$  seja superconformalmente covariante, onde  $h$  é conhecido como *peso* ou *dimensão* de  $\phi$ . Isto significa que

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z})d\mathbf{z}^h &= \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{z}})d\tilde{\mathbf{z}}^h, \\ \phi(\mathbf{z}) &= \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{z}})(D\tilde{\theta})^{2h}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

O campo tensorial superconforme é o análogo de um campo tensorial conforme ordinário  $\phi$ , de peso ou dimensão  $h$ , satisfazendo a lei de transformação (1.29). Os componentes do campo  $\phi(\mathbf{z}) = \phi_0(z) + \theta\phi_1(z)$  formam-se de um campo conforme ordinário  $\phi_0$  (de peso  $h$ ) e um campo conforme ordinário  $\phi_1$  (de peso  $h + 1/2$ ).

De maneira análoga ao que fizemos no primeiro capítulo; uma transformação superconforme infinitesimal

$$\mathbf{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \delta\mathbf{z}(\mathbf{z}), \quad (3.15)$$

transforma os campos tensoriais superconformes de maneira similar a fórmula (1.46)

$$\phi = \tilde{\phi} + \delta_v \phi, \quad (3.16)$$

$$\delta_v \phi = (v\partial + 1/2DvD + h\partial v)\phi, \quad (3.17)$$

$$v(\mathbf{z}) = \delta z + \theta\delta\theta, \quad (3.18)$$

que é representada em função do campo vetorial superconforme  $v(\mathbf{z})$ , onde este último é um campo tensorial superconforme de peso  $-1$ .

Em seguida vemos que as parametrizações de Grassman podem ser escritas em termos de dois parâmetros,  $\delta z = v_0$  e  $\delta\theta = v_1$ :

$$\begin{aligned} v(z, \theta) &= v_0 + \theta v_1, \\ \delta z &= v_0 + \frac{1}{2}\theta v_1 = v - \theta\delta\theta, \\ \delta\theta &= \frac{1}{2}(v_1 + \theta\partial v_0) = \frac{1}{2}Dv. \end{aligned} \quad (3.19)$$

As relações de comutação da álgebra de Lie são agora descritas analogamente por (1.31) e (1.32) através das seguintes relações :

$$\delta_{[v, \omega]} = [\delta_v, \delta_\omega], \quad [v, \omega] = v\partial\omega - \omega\partial v + \frac{1}{2}DvD\omega. \quad (3.20)$$

### 3.1.3 Geradores superconformes, OPE e expansão em modos.

Uma transformação superconforme infinitesimal é gerada pelo operador

$$T_{[v]} = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} v(\mathbf{z})T(\mathbf{z}), \quad (3.21)$$

onde  $v(\mathbf{z})$  é o campo infinitesimal superconforme (3.18) e  $C_0$  gira uma vez ao redor da origem, realizando uma “hiper-superfície de tipo espaço” na quantização radial. As relações de comutação dos operadores podem ser representados nos produtos dos operadores ordenados temporalmente,

$$\begin{aligned} [T_{[v]}, \phi(\mathbf{z}_2)] &= \oint_{C_{0,2}-C_0} \frac{dz_1}{2\pi i} v(\mathbf{z}_1)T(\mathbf{z}_1)\phi(\mathbf{z}_2) \\ &= \oint_{C_2} \frac{dz_1}{2\pi i} v(\mathbf{z}_1)T(\mathbf{z}_1)\phi(\mathbf{z}_2) = \delta_v \phi(\mathbf{z}_2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $C_{0,2}$  gira ao redor de  $z_2$  e da origem, o que significa que  $|z| > |z_2|$ , e  $C_0$  gira ao redor da origem mas não de  $z_2$ , ou seja  $|z_2| > |z| > 0$ . A deformação dos contornos é justificado pela analiticidade dos produtos ordenados temporalmente por  $z_2 \neq 0, z_1$ . Estes contornos e as deformações podem ser sempre escolhidas para não considerar qualquer outros campos que podem estar presentes na função de correlação .

Estes argumentos da integral de contorno mostram que as relações de comutação dos geradores  $L_{[v]}$  são codificadas na parte singular do produto de operadores de  $T(\mathbf{z})$ .

As partes singulares da OPE são campos (quirais) analíticos, entre eles e com outros campos quânticos, estes são equivalentes às suas próprias relações de comutação . A equivalência é realizada pelo argumento do contorno.

A vantagem do produto de operadores é que eles são independentes da interpretação do espaço de Hilbert, já que eles se obtém em uma superfície arbitrária de duas dimensões, por isto são facilmente calculados a partir das funções de correlação que estão nas representações da integral funcional.

O campo quântico fundamental em uma teoria de campo superconforme é o supertensor de energia-momento

$$T(\mathbf{z}) = T_F(z) + \theta T_B(z) , \quad (3.23)$$

onde  $T(\mathbf{z})$  é um supercampo quiral <sup>4</sup> de dimensão  $\frac{3}{2}$ ,  $T_B$  é o tensor ordinário de energia-momento (dimensão  $(2,0)$ ) e  $T_F$  é seu “superparceiro” (dimensão  $(3/2,0)$ ).

$T(\mathbf{z})$  gera transformações superconformes (3.18) através da seguinte relação

$$\delta_v \phi(\mathbf{z}_2) = \oint_{C_2} \frac{dz_1}{2\pi i} v(\mathbf{z}_1) T(\mathbf{z}_1) \phi(\mathbf{z}_2) , \quad (3.24)$$

onde  $C_2$  é um contorno simples ao redor de  $z_2$ . Como sempre, esta identidade é válida dentro das funções de correlações . Se o campo  $\phi$  tem peso  $h$  e o tensor de energia-momento tem peso

---

<sup>4</sup> $\bar{D}T(z) = 0$

$3/2$  , então  $\phi$  e  $T$  transformam-se sob as transformações superconformes como

$$T(\mathbf{z}_1)\phi(\mathbf{z}_2) \sim h \frac{\theta_{12}}{z_{12}^2} \phi(\mathbf{z}_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{z_{12}} D_2 \phi + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2 \phi + \dots, \quad (3.25)$$

onde omitimos os termos que não são singulares, já que somente a parte singular da OPE contribui na integral de contorno.

O supertensor de energia-momento é um campo superconforme anômalo de peso  $3/2$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{z}_1)T(\mathbf{z}_2) &\sim \frac{\hat{c}}{4} \frac{1}{z_{12}^3} + \frac{3}{2} \frac{\theta_{12}}{z_{12}^2} T(\mathbf{z}_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{z_{12}} D_2 T + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2 T, \\ \delta_v T &= (v\partial + \frac{1}{2}(Dv)D + \frac{3}{2}\partial v)T + \frac{1}{8}\hat{c}\partial^2 Dv, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde o coeficiente  $\hat{c}$  mostra a anomalia (o termo central no produto de operadores), e caracteriza o termo fundamental de uma teoria de campo conforme em duas dimensões.

As relações (3.25) e (3.26), são uma forma compacta de expressar um grande número de equações . Para ver isto expandiremos as relações (3.25) e (3.26) com ajuda da equação (3.23), e então achamos

$$\begin{aligned} T_B(z_1)T_B(z_2) &\sim \frac{3\hat{c}/4}{(z_1-z_2)^4} + \frac{2}{(z_1-z_2)^2} T_B(z_2) + \frac{1}{(z_1-z_2)} \partial_2 T_B(z_2), \\ T_B(z_1)T_F(z_2) &\sim \frac{3/2}{(z_1-z_2)^2} T_F(z_2) + \frac{1}{(z_1-z_2)} \partial_2 T_F(z_2), \\ T_F(z_1)T_F(z_2) &\sim \frac{\hat{c}/4}{(z_1-z_2)^3} + \frac{1/2}{(z_1-z_2)} T_B(z_2), \\ T_B(z_1)\phi_0(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1-z_2)^2} \phi_0(z_2) + \frac{1}{(z_1-z_2)} \partial_2 \phi_0, \\ T_B(z_1)\phi_1(z_2) &\sim \frac{h+1/2}{(z_1-z_2)^2} \phi_1(z_2) + \frac{1}{(z_1-z_2)} \partial_2 \phi_1, \\ T_F(z_1)\phi_0(z_2) &\sim \frac{1/2}{(z_1-z_2)^2} \phi_1(z_2), \\ T_F(z_1)\phi_1(z_2) &\sim \frac{h}{(z_1-z_2)^2} \phi_0(z_2) + \frac{1/2}{(z_1-z_2)} \partial_2 \phi_0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os campos expandidos em séries de Laurent (Fourier) são

$$\begin{aligned} T_F(z) &= \sum_n \frac{1}{z^{n+3/2}} \frac{1}{2} G_n, \\ T_B(z) &= \sum_n \frac{1}{z^{n+2}} L_n, \\ \phi_0(z) &= \sum_n \frac{1}{z^{n+h}} \phi_{0,n}, \end{aligned}$$

$$\phi_1(z) = \sum_n \frac{1}{z^{n+h+\frac{1}{2}}} \phi_{1,n}. \quad (3.28)$$

As potências de  $z$  mantêm-se covariantes quando  $z \rightarrow \log z$  (ou seja levando o plano para o cilindro). O adjunto de um campo é dado por  $(\phi(z)dz^h)^\dagger = \phi^\dagger(\bar{z})d\bar{z}^h$ . A condição de realidade do supertensor de energia-momento implica

$$L_m^\dagger = L_{-m}, \quad G_m^\dagger = G_{-m}. \quad (3.29)$$

Em termos de modos a álgebra superconforme  $N = 1$ <sup>5</sup> é

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \hat{c}/8(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [G_m, G_n] &= 2L_{m+n} + \hat{c}/2(m^3 - 1/4)\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, G_n] &= (\frac{1}{2}m - n)G_{m+n} \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde  $\hat{c} = \frac{3c}{2}$  é tal que o supercampo  $\mathbf{X} = x(z) + \theta\psi(z)$  tenha  $\hat{c} = 1$  (este está composto de um campo escalar livre com  $c = 1$  e um fêrmion de Majorana livre com  $c = \frac{1}{2}$ ).

### 3.2 Campos de matéria para a supercorda $N = 1$

Na teoria superconforme  $N = 1$  temos a ação e as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} S_{mat} &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z d\theta d\bar{\theta} \bar{D}\mathbf{X}^\mu D\mathbf{X}_\mu, \\ \bar{D}D\mathbf{X}_\mu &= 0, \\ \mathbf{X}^\mu(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= X^\mu(\mathbf{z}) + X^\mu(\bar{\mathbf{z}}), \\ X^\mu(\mathbf{z}) &= x^\mu(z) + \theta\psi^\mu(z), \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde o campo auxiliar  $\mathbf{F}^\mu = \partial_\theta\partial_{\bar{\theta}}\mathbf{X}^\mu$  foi eliminado com ajuda de sua equação de movimento.

A ação em componentes dos campos é

$$S_{mat} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\bar{\partial}x^\mu \partial x_\mu - \psi \bar{\partial}\psi - \bar{\psi} \partial\psi). \quad (3.32)$$

<sup>5</sup>Se  $G_n$  tem modos inteiros, então teremos a álgebra de Ramond (R). No caso que  $G_n$  tenha modos semi-inteiros, então teremos a álgebra de Neveu-Schwarz (NS).

e o tensor de energia-momento é

$$T(z, \theta) = -\frac{1}{2} D\mathbf{X}^\mu D^2\mathbf{X}_\mu = -\frac{1}{2} [\psi\partial X + \theta(\partial X\partial X + \partial\psi\psi)]. \quad (3.33)$$

Vemos que o componente bosônica de  $T$  é o tensor de energia-momento bosônico e o componente fermiônica é a corrente de Noether com spin  $\frac{3}{2}$ .

A função de dois pontos no plano  $z$  é

$$\langle \mathbf{X}^\mu(z_1, \theta_1) \mathbf{X}^\nu(z_2, \theta_2) \rangle = -g^{\mu\nu} \log(z_{12}), \quad (3.34)$$

e em seguida usamos a propriedade de factorização das partes holomórfica e anti-holomórfica, então a álgebra dos supercampos serão

$$T(z_1, \theta_1) D\mathbf{X}^\mu(z_2, \theta_2) \sim \frac{1}{2} \frac{\theta_{12}}{z_{12}} D_2\mathbf{X}^\mu + \frac{1}{z_{12}} D_2(D_2(\mathbf{X}^\mu)) + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2(D_2\mathbf{X}^\mu), \quad (3.35)$$

onde  $T(z, \theta)$  satisfaz (3.30) com  $\hat{c} = d$ .

### 3.3 Fantasmas superconformes $N = 1$

Usando agora o formalismo conforme reescreveremos os determinantes de Fadeev-Popov que se originam a partir da fixação do gauge superconforme. Então, como consequência de uma mudança de variáveis (em coordenadas complexas) obteremos o seguinte jacobiano

$$\begin{aligned} \delta g_{zz} &= \nabla_z \delta \xi, \\ \delta \chi_z &= \nabla_z \delta v, \end{aligned} \quad (3.36)$$

mais as suas conjugadas complexas, e desta mesma maneira o superdeterminante será

$$\det_g(\nabla_z) \det_\chi(\nabla_z), \quad (3.37)$$

e estes últimos são exponenciados através de uma integral de caminho sobre um par conjugado de dimensões de supercampos fantasmas <sup>6</sup>  $-1, \frac{3}{2}$

$$S_{ft} = \int d^2z d^2\theta B_{z\theta} \bar{D}C^z,$$

---

<sup>6</sup>veja o apêndice A.

$$\begin{aligned} C^z &= c^z + \theta \gamma^\theta, \\ B_{z\theta} &= \beta_{z\theta} + \theta b_{zz}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde  $(b, c)$  são fantasmas de reparametrização e  $(\beta, \gamma)^\tau$  são a nova consequência, os quais formam as lagrangeanas de primeira ordem com estatística bosônica, e que apareceram depois de fixar o campo  $\chi_\alpha$ .

As equações de movimento

$$\bar{D}B_{z\theta} = \bar{D}C^z = 0, \quad (3.39)$$

mostram novamente que os campos fantasmas são superfunções analíticas (no plano  $\mathbf{z}$ ) com o propagador seguinte

$$\langle B(z_1, \theta_1) C(z_2, \theta_2) \rangle = \frac{\theta_{12}}{z_{12}}. \quad (3.40)$$

O supertensor de energia-momento é

$$\begin{aligned} T_{ft}(z, \theta) &= -C(D^2 B) + \frac{1}{2}(DC)(DB) - \frac{3}{2}(D^2 C)B \\ &= -c\partial\beta + \frac{1}{2}\gamma\beta - \frac{3}{2}(\partial c)\beta + \theta \left[ c\partial b + 2(\partial c)b - \frac{1}{2}\gamma\partial\beta - \frac{3}{2}(\partial\gamma)\beta \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

As propriedades conformes deste sistema de fantasmas estão codificados nas seguintes expressões

$$\begin{aligned} T_{ft}(z_1, \theta_1) T_{ft}(z_2, \theta_2) &\sim (-10) \frac{1}{z_{12}} + \frac{3}{2} \frac{\theta_{12}}{z_{12}} T(z_2, \theta_2) + \frac{1}{z_{12}} \partial^2 T + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2 T, \\ T_{ft}(z_1, \theta_1) C(z_2, \theta_2) &\sim (-1) \frac{\theta_{12}}{z_{12}} C(z_2, \theta_2) + \frac{1}{z_{12}} D_2 C + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial_2 C, \\ T_{ft}(z_1, \theta_1) B(z_2, \theta_2) &\sim \frac{3}{2} \frac{\theta_{12}}{z_{12}} B(z_2, \theta_2) + \frac{1}{z_{12}} D_2 B + \frac{\theta_{12}}{z_{12}} \partial^2 B. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desta última relação deduzimos que a anomalia do sistema de fantasmas mais o sistema de matéria é igual à  $\hat{c} = d - 10$ , onde percebemos que esta anomalia desaparece em  $d = 10$ .

---

<sup>\tau</sup> $\gamma^\theta \equiv \gamma$  representa a generalização do spin conforme as quantidades semi-inteiras.

O super-operador de BRST é calculado através da integral de linha da corrente da seguinte forma

$$j_{BRST} = C^z \left( T_{mat}(z, \theta) + \frac{1}{2} T_{ft}(z, \theta) \right), \quad (3.43)$$

$$Q_{BRST} = \oint \frac{dzd\theta}{2\pi i} j_{BRST}, \quad (3.44)$$

A álgebra superconforme do tensor momento (3.33) mais (3.41) realizam a transformação de BRST (somente na dimensão crítica  $d = 10$ ),

$$Q_{BRST}^2 = 0. \quad (3.45)$$

## Capítulo 4

# TEORIAS SUPERCONFORMES

## $N = 2$

### 4.1 Supercoordenadas $N = 2$

A supercorda com  $N = 2$  foi introduzido por Ademollo [17], e tem uma dimensão crítica 2. No superspaço  $N = 2$ , existem as seguintes variáveis grasmaeanas  $\theta^+$ ,  $\theta^-$ ,  $\bar{\theta}^+$ ,  $\bar{\theta}^-$  e associados a estes existem também as derivadas covariantes  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $\bar{D}^+$ ,  $\bar{D}^-$  respectivas. Estas derivadas covariantes são definidas da forma seguinte:

$$\begin{aligned} D^\pm &= \frac{\partial}{\partial\theta^\mp} + \theta^\pm\partial, \\ \bar{D}^\pm &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\mp} + \bar{\theta}^\pm\bar{\partial}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Em seguida podemos definir na parte holomórfica as seguintes diferenças de coordenadas

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= z_a - z_b - (\theta_a^+\theta_b^- + \theta_a^-\theta_b^+), \\ \theta_{ab}^i &= \theta_a^i - \theta_b^i; \quad (i = +, -). \end{aligned} \quad (4.2)$$

as quais satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \partial_{z_a} Z_{ab} &= 1, \\ \partial_{z_b} Z_{ab} &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_a^\pm(Z_{ab}) &= D_b^\pm(Z_{ab}) = \theta_{ab}^\pm, \\
D_a^\pm \theta_{ab}^\pm &= D_b^\pm \theta_{ab}^\pm = 0, \\
D_a^\mp \theta_{ab}^\pm &= 1, \\
D_a^\mp \theta_{ab}^\pm &= -1.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

A expansão em séries de Taylor no superespaço  $N = 2$  é

$$f(Z_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Z_{ab})^2 \partial_{z_b}^n \left[ 1 + \theta_{ab}^+ D_b^- + \theta_{ab}^- D_b^+ + \frac{1}{2} (\theta_{ab}^+ \theta_{ab}^- D_b^+ D_b^- + \theta_{ab}^- \theta_{ab}^+ D_b^- D_b^+) \right] f(Z_b). \tag{4.4}$$

Podemos também definir as integrais

$$\begin{aligned}
\int d\theta^+ \int d\theta^- \theta^- \theta^+ &\equiv 1, \\
\oint DZ_a &\equiv \oint \left( \frac{dz_a}{2\pi i} \right) \int d\theta_a^+ \int d\theta_a^-,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e em seguida derivar as fórmulas de integração

$$\begin{aligned}
\oint DZ_a \frac{\theta_{ab}^- \theta_{ab}^+}{Z_{ab}^{n+1}} f(Z_a) &= \frac{1}{n!} \partial_{z_b}^n f(Z_b), \\
\oint DZ_a \frac{\theta_{ab}^+}{Z_{ab}^{n+1}} f(Z_a) &= \frac{1}{n!} \partial_{z_b}^n D_b^+ f(Z_b), \\
\int DZ_a \frac{\theta_{ab}^-}{Z_{ab}^{n+1}} f(Z_a) &= \frac{1}{n!} \partial_{z_b}^n D_b^- f(Z_b), \\
\int DZ_a \frac{f(Z_a)}{Z_{ab}^{n+1}} &= \frac{1}{2n!} \partial_{z_b}^n (D_b^- D_b^+ + D_b^+ D_b^-) f(Z_b).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

## 4.2 Ação, OPE's e os geradores superconformes $N = 2$ .

Em seguida escreveremos a ação  $N = 2$  em termos de dois supercampos

$$\begin{aligned}
S^\mu(z, \bar{z}, \theta^+, \bar{\theta}^+, \theta^-, \bar{\theta}^-), \\
S^{\mu*}(z, \bar{z}, \theta^+, \bar{\theta}^+, \theta^-, \bar{\theta}^-),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

os quais satisfazem os seguintes dois vínculos

$$\begin{aligned}
D^- S^\mu &= \bar{D}^- S^\mu = 0, \\
D^+ S^{\mu*} &= \bar{D}^+ S^{\mu*} = 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
S^\mu &= X^\mu(z, \bar{z}) + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) + i\theta^+\theta^-\partial X^\mu(z, \bar{z}) - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) \\
&+ i\theta^-\psi^{+\mu}(z, \bar{z}) - \theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}\psi^{+\mu}(z, \bar{z}) + i\bar{\theta}^-\psi^{+\mu}(z, \bar{z}) - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial\psi^{+\mu}(z, \bar{z}) \\
&+ i\theta^-\bar{\theta}^-D^\mu(z, \bar{z})
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
S^{\mu*} &= X^{\mu*}(z, \bar{z}) - i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}X^{\mu*}(z, \bar{z}) - i\theta^+\theta^-\partial X^{\mu*}(z, \bar{z}) - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\partial\bar{\partial}X^{\mu*}(z, \bar{z}) \\
&+ i\theta^+\psi^{-\mu}(z, \bar{z}) + \theta^+\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}\psi^{-\mu}(z, \bar{z}) + i\bar{\theta}^+\psi^{-\mu}(z, \bar{z}) + \theta^+\theta^-\bar{\theta}^+\partial\psi^{-\mu}(z, \bar{z}) \\
&+ i\theta^+\bar{\theta}^+D^{\mu*}(z, \bar{z})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

então, podemos construir nossa ação da seguinte forma

$$A = \int dzd\bar{z} \int d\theta^+ d\bar{\theta}^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- S^{\mu*} S_\mu, \tag{4.11}$$

com as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
D^+\bar{D}^+S^\mu &= 0, \\
D^-\bar{D}^-S^{\mu*} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

então vemos que a solução fica dividida em duas partes,  $S = S_1 + S_2$ , holomórfico e anti-holomórfico respectivamente. A partir daí exigimos que

$$\begin{aligned}
D^-S_1^\mu &= \bar{D}^-S_1^\mu = \bar{D}^+S_1^\mu = 0, \\
D^-S_2^\mu &= \bar{D}^-S_2^\mu = D^+S_2^\mu = 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_1^\mu(z + i\theta^+\theta^-, \theta^-) &= X^\mu(z) + i\theta^+\theta^-\partial X^\mu(z) + i\theta^-\psi^{+\mu}, \\
S_2^\mu(\bar{z} + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-, \bar{\theta}^-) &= X^\mu(\bar{z}) + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}X^\mu(\bar{z}) + i\bar{\theta}^-\bar{\psi}^{+\mu}, \\
S_1^{\mu*}(z + i\theta^+\theta^-, \theta^-) &= X^{\mu*}(z) - i\theta^+\theta^-\partial X^{\mu*}(z) + i\theta^+\psi^{-\mu}, \\
S_2^{\mu*}(\bar{z} + i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-, \bar{\theta}^-) &= X^{\mu*}(\bar{z}) - i\bar{\theta}^+\bar{\theta}^-\bar{\partial}X^{\mu*}(\bar{z}) + i\bar{\theta}^+\bar{\psi}^{-\mu}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Em seguida construímos os supercampos holomórficos através da combinação na forma

$X(Z, \bar{Z}) = X(Z) + X(\bar{Z}) = S_1 + S_1^* + S_2 + S_2^* = S + S^*$  e obtemos

$$\mathbf{X}^\mu(Z) = X^\mu(z) + \theta^- \psi^+(z) + \theta^+ \psi^{-\mu}(z) + i\theta^- \theta^+ \partial Y^\mu(z), \quad (4.15)$$

$$\left( \text{onde } X(Z) \equiv \mathbf{X}^\mu(Z) \right),$$

cujas OPE's serão

$$\mathbf{X}^\mu(Z_a) \mathbf{X}^\nu(Z_b) \sim \eta^{\mu\nu} \ln Z_{ab}, \quad (4.16)$$

ou em componentes temos

$$\begin{aligned} X^\mu(z) X^\nu(w) &\sim \eta^{\mu\nu} \ln(z-w), \\ Y^\mu(z) Y^\nu(w) &\sim \eta^{\mu\nu} \ln(z-w), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\psi_i^\mu(z) \psi_j^\nu(w) \sim \frac{\delta_{ij} \eta^{\mu\nu}}{z-w}, \quad (4.18)$$

onde “ $i$ ” e “ $Z_{ab}$ ” foram definidos em (4.2).

A contribuição de  $\mathbf{X}^\mu$  ao tensor de energia-momento será

$$T(Z) = \frac{1}{2} D^- \mathbf{X}^\mu D^+ \mathbf{X}^\mu, \quad (4.19)$$

e reescrevendo este tensor  $N=2$  em termos de componentes dos campos terá a seguinte forma

$T = J + \theta^+ G_+ + \theta^- G_- + \theta^+ \theta^- T_B$ , onde  $T_B(z)$  ( $h \equiv 2$ ) é o tensor de energia-momento bosônico,  $G_\pm(z)$  ( $h \equiv \frac{3}{2}$ ) são os geradores das supersimetrias e  $J(z)$  ( $h \equiv 1$ ) é o gerador da corrente  $U(1)$ .

Em modos estes geradores serão

$$T(z) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \quad (4.20)$$

$$G^+(z) = \sum_r \frac{G_r^+}{z^{r+\frac{3}{2}}}, \quad (4.21)$$

$$G^-(z) = \sum_r \frac{G_r^-}{z^{r+\frac{3}{2}}}, \quad (4.22)$$

$$J(z) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}. \quad (4.23)$$

Estes geradores satisfazem a álgebra superconforme  $N = 2$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n,0}, \quad (4.24)$$

$$[L_n, G_s^\pm] = \left(\frac{n}{2} - s\right)G_{n+s}^\pm, \quad (4.25)$$

$$[L_n, J_m] = -mJ_{n+m}, \quad (4.26)$$

$$[J_n, G_s^\pm] = \pm G_{n+s}^\pm, \quad (4.27)$$

$$[J_n, J_m] = \frac{c}{3}n\delta_{m+n,0}, \quad (4.28)$$

$$[G_r^-, G_s^+] = 2L_{r+s} - (r - s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}, \quad (4.29)$$

onde  $(r, s \in \mathcal{Z} + \frac{1}{2})$  no setor de NS e  $(r, s \in \mathcal{Z})$  no setor R.

Os supercampos  $N = 2$  conformes,  $\psi_q^h(Z)$ , são caracterizados por um peso  $h$  e uma carga  $q$ ,  $(U(1))$  [17, 14]. Em vista do último, pode-se definir um operador  $\Delta^{h,q}$  da seguinte maneira:

$$\Delta^{h,q} = h \frac{\theta_{ab}^+ \theta_{ab}^-}{Z_{ab}^2} - \frac{1}{2} \frac{\theta_{ab}^+}{Z_{ab}^2} D_+ + \frac{1}{2} \frac{\theta_{ab}^-}{Z_{ab}^2} D_- + \frac{\theta_{ab}^- \theta_{ab}^+}{Z_{ab}^2} \partial_b - \frac{q}{2Z_{ab}}, \quad (4.30)$$

onde  $\theta_{ab}^\pm \equiv \theta_a^\pm - \theta_b^\pm$ . No caso  $q = 0$ , por simplicidade denotaremos este operador como

$$\Delta^h \equiv \Delta^{h,0}. \quad (4.31)$$

Agora a OPE destes supercampos conformes com o tensor de energia-momento será a seguinte

$$T(Z_a)\psi_q^h(Z_b) \sim \Delta^{h,q}\psi_q^h(Z_b), \quad (4.32)$$

de maneira semelhante o tensor de energia-momento com  $N = 2$ , satisfaz a álgebra superconforme expressada através da OPE

$$T_a T_b \sim \frac{c}{12} \frac{1}{Z_{ab}^2} + \Delta^1 T_b, \quad (4.33)$$

onde  $c$  é a carga central e também podemos observar que  $T$  tem  $q = 0$  e  $h = 1$ .

Se abrimos a OPE (4.33) obteremos as seguintes OPEs em componentes

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}c}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}, \quad (4.34)$$

$$T(z)J(w) \sim \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{(z-w)}, \quad (4.35)$$

$$T(z)G^\pm(w) \sim \frac{\frac{3}{2}G^\pm(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm(w)}{(z-w)}, \quad (4.36)$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{\frac{1}{3}c}{(z-w)^2}, \quad (4.37)$$

$$J(z)G^\pm(w) \sim \pm \frac{G^\pm(w)}{(z-w)}, \quad (4.38)$$

$$G^+(z)G^-(w) \sim \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \partial J(w)}{(z-w)}. \quad (4.39)$$

### 4.3 Fantasma superconformes $N = 2$ .

Como sabemos a teoria superconforme é invariante sobre algumas transformações de gauge local. A fixação de gauge gera um determinante de Fadeev-Popov, o qual é expresso como uma ação de supercampos usando os fantasmas  $C$  e  $B$  da teoria  $N = 2$  da seguinte forma:

$$C \equiv c + i\theta^+\gamma^- - i\theta^-\gamma^+ + i\theta^-\theta^+\xi, \quad B \equiv -i\eta - i\theta^+\beta^- - i\theta^-\beta^+ + \theta^-\theta^+b, \quad (4.40)$$

onde os fantasmas  $c$  e  $b$  vêm da invariância de reparametrizações, os fantasmas  $\gamma^\pm$  e  $\beta^\pm$  são superfantasmas para a transformações de duas supersimetrias locais e por último  $\xi$  e  $\eta$  são os fantasmas associados com as simetrias locais  $U(1)$ .

Como sabemos os lagrangeanos de primeira ordem (A.1) tem a carga de "background" ( $Q$ ) e a estatística ( $\varepsilon$ ) seguinte  $(Q, \varepsilon) = (-3, +)$ ,  $(2, -)$  e  $(-1, +)$ , respectivamente. Note que a carga total de "background" desaparece. A ação de fantasmas em termos de supercampos está dado pela seguinte expressão

$$S^{ft} = \frac{1}{\pi} \int d^2z d\theta^+ d\theta^- B \bar{\partial} C + c.c. . \quad (4.41)$$

A OPE fundamental para a parte holomórfica tomará a seguinte forma

$$C(Z_a)B(Z_b) \sim \frac{\theta_{ab}^- \theta_{ab}^+}{Z_{ab}} \sim B(Z_a)C(Z_b), \quad (4.42)$$

e o tensor de energia-momento para os fantasmas será:

$$T^{ft}(Z) = \partial(CB)(Z) - \frac{1}{2}D^+CD^-B(Z) - \frac{1}{2}D^-CD^+B(Z), \quad (4.43)$$

onde os supercampos  $B(Z)$  e  $C(Z)$  tem carga  $q = 0$  e peso conforme  $h = +1$  e  $h = -1$  respectivamente.

Se nós consideramos que o tensor de energia-momento total seja

$$\mathbf{T} = T + T^{ft}, \quad (4.44)$$

então a OPE de  $\mathbf{T}$  com ele mesmo será:

$$\mathbf{T}(Z_a)\mathbf{T}(Z_b) \sim \frac{D-2}{4Z_{ab}^2} + \frac{\theta_{ab}^- \theta_{ab}^+}{Z_{ab}^2} + \frac{1}{2Z_{ab}} (\theta_{ab}^- D_b^+ - \theta_{ab}^+ D_b^-) \mathbf{T}(Z_b) + \frac{\theta_{ab}^- \theta_{ab}^+}{Z_{ab}^2} \partial \mathbf{T}(Z_b), \quad (4.45)$$

onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo. A dimensão crítica é  $D = 2$ , e isto na sua vez implica que a carga central do setor de matéria é  $c = 6$ . Também vemos que  $\mathbf{T}$  é um supercampo conforme com  $q = 0$  e  $h = 1$  quando  $D = 2$ .

Analizando por exemplo o primeiro termo em (4.45) obteremos

$$\frac{D-2}{4} \left[ \frac{1}{(z_a - z_b - (\theta_a^+ \theta_b^- + \theta_a^- \theta_b^+))^2} \right] \sim \frac{\frac{1}{4}(D-2)}{(z_a - z_b)^2} \left( 1 + \frac{\theta_a^+ \theta_b^- + \theta_a^- \theta_b^+}{z_a - z_b} \right)^2 \sim \frac{\frac{1}{2}(D-2)}{(z_a - z_b)^2} \theta_a^+ \theta_a^- \theta_b^+ \theta_b^-, \quad (4.46)$$

então, se comparamos em seguida com o termo proporcional à “ $\theta_a^+ \theta_a^- \theta_b^+ \theta_b^-$ ”, no lado esquerdo da equação (4.45),

$$\mathbf{T}(Z_a)\mathbf{T}(Z_b) \sim \theta_a^+ \theta_a^- \theta_b^+ \theta_b^- T_a T_b, \quad (4.47)$$

e juntando com (4.34), obtemos  $\frac{D-2}{2} = \frac{1}{2}c$ .

De outro lado a carga nilpotente de BRST com  $N = 2$  é calculado através de

$$Q_{BRST} = \oint dZ C \left( T + \frac{1}{2} T^{ft} \right), \quad (4.48)$$

onde  $\oint dZ$  foi definido em (4.5) e quando  $D = 2$  esta satisfaz

$$(Q_{BRST})^2 = 0 . \quad (4.49)$$

## Capítulo 5

# IMERSÃO DAS TEORIAS DE CORDAS $N = 0 \subset N = 1 \subset N = 2$ .

Neste capítulo veremos como foram construídos os geradores das teorias superconformes os quais baseiam-se numa escolha de campos livres<sup>1</sup> e depois os mecanismos que mostram o passo entre os modelos superconformes com a ajuda das transformações de similaridades.

Notemos qual é a restrição que seguiremos neste trabalho. Para isto chamamos (“ $p, q$ ”)<sup>2</sup> de “vácuo” da corda, no sentido que, uma dada teoria conforme com cargas centrais apropriadas tenha ( $p, q$ ) *simetrias superconformes*

$$N = 0 \rightarrow c = 26; \quad N = 1 \rightarrow \hat{c} = 10; \quad N = 2 \rightarrow \hat{c} = 2,$$

então podemos dizer que o vácuo da corda com ( $p, q$ ) *simetrias superconformes* (holomórfico, anti-holomórfico) pode ser visto como uma escolha especial do vácuo da corda com ( $p', q'$ ) *simetrias superconformes* sempre que

$$0 \leq p \leq p' \leq 2,$$

$$0 \leq q \leq q' \leq 2.$$

Desta maneira a corda com (2, 2) *simetrias superconformes* será vista como a principal, a partir da qual todas as outras são obtidas.

---

<sup>1</sup>Ver Apêndice A para mais detalhes sobre campos livres.

<sup>2</sup>Remarcamos que esta teoria pertence à folha-mundo (SUSY pequena).

## 5.1 $N = 0 \subset N = 1$

Em primeiro lugar construímos explicitamente uma transformação de similaridade que nos permitirá ir de uma classe  $N = 1$  à outra  $N = 0$ . O operador de BRST torna-se uma soma direta do operador correspondente de BRST  $N = 0$  e uma parte topológica adicional. Como resultado pode-se mencionar que o espectro físico de  $N = 1$  é isomórfico ao produto tensorial do espectro de  $N = 0$  e do setor topológico (que está constituído somente de vácuo). Também se conserva manifestamente a álgebra dos operadores.

Se a um campo de matéria com tensor de energia-momento

$$T_m \tag{5.1}$$

e termo central  $c = 26$ , lhe adicionamos campos fermiônicos com “spin”<sup>3</sup>  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ , onde estes são denotados por

$$(b_1, c_1), \tag{5.2}$$

então como consequência teremos um sistema com carga central  $c = 15$  ( $\hat{c} = 10$ ).

Assim pois este novo sistema pode ser considerado como um sistema de matéria da corda fermiônica crítica  $N = 1$ , em vista que, nele existe uma álgebra superconforme  $N = 1$  (3.25):

$$T_{N=1}(z)T_{N=1}(w) \sim \frac{15}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T_{N=1}(w) + \frac{1}{z-w} \partial T_{N=1}(w), \tag{5.3}$$

$$T_{N=1}(z)G_{N=1}(w) \sim \frac{3}{2} \frac{1}{(z-w)^2} G_{N=1}(w) + \frac{1}{z-w} \partial G_{N=1}(w), \tag{5.4}$$

$$G_{N=1}(z)G_{N=1}(w) \sim \frac{10}{(z-w)^3} + \frac{2}{(z-w)} T_{N=1}(w). \tag{5.5}$$

mas com os seguintes geradores

$$T_{N=1} = T_m - \frac{3}{2} b_1 \partial c_1 - \frac{1}{2} \partial b_1 c_1 + \frac{1}{2} \partial^2 (c_1 \partial c_1), \tag{5.6}$$

$$G_{N=1} = b_1 + j_{BRST} = b_1 + c_1 (T_m + \partial c_1 b_1) + \frac{5}{2} \partial^2 c_1, \tag{5.7}$$

---

<sup>3</sup>A palavra spin é como sempre usada para denotar o peso ou dimensão conforme.

onde  $j_{BRST} \equiv c_1(T_m + \partial c_1 b_1) + \frac{5}{2} \partial^2 c_1$  é a corrente BRST do sistema  $(T_m, (b_1, c_1))$ .

Note que na relação (5.6) existe um termo de melhoria<sup>4</sup> o qual pode ser reescrito como  $\frac{\partial J}{2}$ , onde

$$J \equiv \partial(c_1 \partial c_1) , \quad (5.8)$$

e este não mudará a carga central do sistema, em vista que

$$JJ \sim 0 . \quad (5.9)$$

Também é necessário remarcar que os campos  $(b_1, c_1)$  garantem que  $G_{N=1}$  tenha spin  $\frac{3}{2}$  em relação a  $T_{N=1}$ .

Vejam os por exemplo a OPE de “GG”

$$\begin{aligned} G(z)G(w) &\sim (b_1(z) + j_{BRST}(z))(b_1(w) + j_{BRST}(w)) \\ &\sim \frac{T_m}{z-w} + \frac{\partial c_1 b_1}{z-w} - \frac{c_1 b_1}{(z-w)^2} + \frac{5}{(z-w)^3} \\ &+ \frac{T_m}{z-w} + \frac{\partial c_1 b_1}{z-w} + \frac{c_1 b_1}{(z-w)^2} + \frac{\partial(c_1 b_1)}{z-w} + \frac{5}{(z-w)^3} \\ &+ \frac{\partial^2(c_1 \partial c_1)}{z-w} \\ &= \frac{10}{(z-w)^3} + \frac{2(T_m - \frac{3}{2}b_1 \partial c_1 - \frac{1}{2}\partial b_1 c_1 + \frac{1}{2}\partial^2(c_1 \partial c_1))}{z-w} \\ &= \frac{10}{(z-w)^3} + \frac{2 T_{N=1}}{(z-w)^2} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se juntarmos os fantasmas de reparametrização com spins  $(b, c) \rightarrow (2, -1)$  e os superfantasmas  $(\beta, \gamma) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  então poderemos construir um espaço de Fock [5] para a corda fermiônica com  $N = 1$  da seguinte maneira

$$\mathbf{F}_{N=1} = (T_m) \otimes (b_1, c_1) \otimes (b, c) \otimes (\beta, \gamma) . \quad (5.11)$$

Primeiramente foi mostrado por Nathan Berkovits e Cumrun Vafa [5] a correspondência  $1 \longleftrightarrow 1$  entre os observáveis físicos de cada teoria através da amplitude de espalhamento. Nesta

<sup>4</sup>Este termo é consequência explícita da OPE (5.4).

seção vai ser analisado esta equivalência em termos de operadores, para isto, construiremos uma transformação de similaridade que mapeará a carga de BRST da teoria de  $N = 1$  à soma direta da carga de BRST da teoria de  $N = 0$  e do setor topológico trivial (cujo estado físico está somente representado pelo seu vácuo), onde cada um dos quais atua exclusivamente no seu próprio setor, a partir daí se vê que  $N = 1$  e  $N = 0$  terão as mesmas cohomologias. De forma semelhante o isomorfismo da álgebra é manifesta.

Para mostrar a equivalência mencionada acima, começaremos com a definição da carga de BRST para o caso da corda  $N = 1$ , definida em (3.43), usando para isto os novos geradores (5.6) e (5.7) e obtendo desta maneira

$$\begin{aligned} Q_{N=1} &= \oint dz \left( cT_{N=1} - \frac{1}{2}\gamma G_{N=1} + bc\partial c - \frac{1}{4}b\gamma^2 + \frac{1}{2}\partial c \beta\gamma - c\beta\partial\gamma \right) \\ &= \oint dz \left[ \left( c - \frac{1}{2}\gamma c_1 \right) T_m + c \left( -\frac{3}{2}b_1\partial c_1 - \frac{1}{2}\partial b_1 c_1 + \frac{1}{2}\partial^2(c_1\partial c_1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\gamma(b_1 + b_1 c_1\partial c_1 + \frac{5}{2}\partial^2 c_1) + bc\partial c - \frac{1}{4}b\gamma^2 + \frac{1}{2}\partial c \beta\gamma - c\beta\partial\gamma \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Em seguida diremos que os estados físicos da corda  $N = 1$  são definidos como a cohomologia de  $Q_{N=1}$  e mostraremos que a cohomologia da carga  $Q_{N=1}$  reduz-se à  $Q_{N=0}$  e  $Q_{top}$  através da seguinte transformação de similaridade

$$e^R Q_{N=1} e^{-R}, \quad (5.13)$$

onde

$$R = \oint dz c_1 \left( \frac{1}{2}\gamma b - 3\partial c \beta - 2c\partial\beta - \frac{1}{2}\partial c_1 c b + \frac{1}{4}\beta\gamma\partial c_1 \right), \quad (5.14)$$

e  $Q_{N=1}$  está definido em (5.12). Logo, se usar a expansão de Baker-Hausdorff em (5.13) obteremos que

$$Q_{N=1} + \frac{1}{1!}[R, Q_{N=1}] + \frac{1}{2!}[R, [R, Q_{N=1}]] + \dots = Q_{N=0} + Q_{top}, \quad (5.15)$$

onde

$$Q_{N=0} = \oint dz (cT_m + bc\partial c), \quad (5.16)$$

$$Q_{top} = \oint dz \left( -\frac{1}{2}b_1\gamma \right). \quad (5.17)$$

A partir daí identificamos que  $Q_{N=0}$  é o operador de BRST na corda  $N = 0$ , que atua somente no espaço de fock  $\mathbf{F}_{N=0}$ , e  $Q_{top}$  é a carga do setor topológico, que atua somente no seu setor topológico. Daqui deduzimos que a cohomologia de  $Q_{N=1}$  é o produto direto da cohomologia  $Q_{N=0}$  e da cohomologia de  $Q_{top}$ . A cohomologia de  $Q_{top}$  está representado unicamente pelo vácuo de  $\mathbf{F}_{top}$

$$[Q_{top}, \beta(\omega)] = \int dz \left( -\frac{1}{2} b_1(z) \gamma(z) \beta(\omega) \right) = -\frac{1}{2} b_1(\omega), \quad (5.18)$$

$$[Q_{top}, c_1(\omega)]_+ = \int dz \left( -\frac{1}{2} b_1(z) \gamma(z) c_1(\omega) \right) = -\frac{1}{2} \gamma(\omega), \quad (5.19)$$

já que  $b_1, \gamma$  são  $Q_{top}$ -exato e  $c_1, \beta$  não são  $Q_{top}$ -fechado, como podemos observar de (5.18) e (5.19), e portanto não estão na cohomologia de  $Q_{top}$ . Como consequência deste último nós obteremos a equivalência entre as cohomologias de  $Q_{N=1}$  e  $Q_{N=0}$ . Assim pois, fica demonstrada a equivalência entre o espaço de Fock  $N = 1$  e o espaço de Fock em  $N = 0$

$$\mathbf{F}_{N=1} = \mathbf{F}_{N=0} = (\mathbf{T}_m) \otimes (\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (5.20)$$

onde notamos que os pares  $(b_1, c_1)$  e  $(\beta, \gamma)$  foram integrados completamente.

## 5.2 $N = 1 \subset N = 2$

Igualmente ao caso anterior, devemos incluir campos adicionais “especias” na teoria de cordas  $N = 1$  com o propósito de formar uma álgebra  $N = 2$ .

Como temos visto, nossos intentos são realizados para poder satisfazer a álgebra das teorias de supercordas com suas respectivas supersimetrias.

Neste caso, também consegue-se demonstrar que uma classe particular de supercordas  $N = 2$  é equivalente às supercodas  $N = 1$ . Exatamente como no caso de  $N = 0 \subset N = 1$ , é necessário construir uma transformação de similaridade que nos levará dos operadores de BRST  $N = 2$  aos operadores da supercorda  $N = 1$  mais setores topológicos.

Nosso primeiro passo é escolher os campos convenientes dentro das supercordas  $N = 2$  e logo provar que este é equivalente as supercordas  $N = 1$ . Nesta prova vemos que a álgebra de operadores é também isomórfica.

Então, para construir a transformação de similaridade, em primeiro lugar tomamos o supertensor de energia-momento da parte de matéria

$$(T_m, G_m) \tag{5.21}$$

das supercordas  $N = 1$ , com carga central  $c_m = 15$  ( $\hat{c} = 5$ ), e complementamos com campos fermiônicos

$$(b_1, c_1), \tag{5.22}$$

com spins  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ , e campos bosônicos

$$(\beta_1, \gamma_1), \tag{5.23}$$

de spin  $(1, 0)$ . A partir daí obtemos um sistema com carga central  $c = 6$ , o qual pode ser usado como a parte de matéria dentro da corda  $N = 2$ . Na realidade, é possível construir os geradores  $N = 2$  para este sistema e para isto é conveniente bosonizar [15] nossos campos  $(\beta_1, \gamma_1)$  como<sup>5</sup>

$$\gamma_1 = \eta_1 e^\phi, \quad \beta_1 = e^{-\phi} \partial \xi_1. \tag{5.24}$$

---

<sup>5</sup>Ver apêndice A.

Então, os geradores  $N = 2$  para este sistema serão

$$\begin{aligned}
 G^- &= b_1, \\
 J &= -b_1 c_1 + \eta_1 \xi_1, \\
 T &= T_m - \frac{3}{2} \beta_1 \partial \gamma_1 - \frac{1}{2} \partial \beta_1 \gamma_1 - b_1 \partial c_1 - \frac{1}{2} \partial (b_1 c_1 + \eta_1 \xi_1), \\
 G^+ &= j_{BRST} = \gamma_1 G_m + c_1 \left( T_m - \frac{3}{2} \beta_1 \partial \gamma_1 - \frac{1}{2} \partial \beta_1 \gamma_1 \right) \\
 &\quad - \gamma_1^2 b_1 + \partial (c_1 \xi_1 \eta_1) + \partial^2 c_1 + b_1 c_1 \partial c_1.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Já que os geradores  $G^+$  e  $T$  estão escritos numa notação mista, então para homogeneizar nossa notação, nós reescreveremos estes geradores em termos dos campos independentes  $(b_1, c_1)$ ,  $(\eta_1, \xi_1)$ ,  $\phi$ :

$$\begin{aligned}
 G^+ &= \eta_1 e^\phi G_m + c_1 \left( T_m + \partial \xi_1 \eta_1 - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \partial^2 \phi \right) - b_1 \eta_1 \partial \eta_1 e^{2\phi} \\
 &\quad + \partial (c_1 \xi_1 \eta_1) + \partial^2 c_1 + b_1 c_1 \partial c_1,
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$T = T_m - \frac{3}{2} b_1 \partial c_1 - \frac{1}{2} \partial b_1 c_1 - \frac{3}{2} \eta_1 \partial \xi_1 - \frac{1}{2} \partial \eta_1 \xi_1 - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \partial^2 \phi, \tag{5.27}$$

com o fim de obter a álgebra  $N = 2$  (4.29).

Vejamos por exemplo que

$$\begin{aligned}
 J(z)G^-(w) &\sim -\frac{b_1}{z-w} \\
 &= -\frac{G^-(w)}{z-w},
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

a partir daí podemos calcular

$$\begin{aligned}
 [J_n, G_s^-] &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{J(z)G^-(w)}{z^{-n}w^{-s-\frac{1}{2}}} \\
 &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \frac{w^{n+s+\frac{1}{2}} b_1}{z-w} = -G_{n+s}^-,
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

e vemos que coincide com (4.27).

De igual maneira podemos ver que

$$\begin{aligned} T(z)G^-(w) &\sim \left(T_m - \frac{3}{2}b_1\partial c_1 - \frac{1}{2}\partial b_1c_1 - \frac{3}{2}\eta_1\partial\xi_1 - \frac{1}{2}\partial\eta_1\xi_1 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \partial^2\phi\right)(b_1) \\ &\sim \frac{3}{2}\frac{G^-(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^-(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

e encontrar que

$$\begin{aligned} [L_n, G_s^-] &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} T(z)z^{n+1}G^-(w)w^{m+\frac{1}{2}} \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \left(w^{n+m+\frac{3}{2}}\frac{\partial G^-}{z-w} + \frac{3}{2}(n+1)\frac{w^{n+m+\frac{1}{2}}G^-}{z-w}\right) \\ &= \frac{3}{2}(n+1)G_{n+m}^- - (n+m+\frac{3}{2})G_{n+m}^- \\ &= \left(\frac{n}{2} - m\right)G_{n+m}^-, \end{aligned} \quad (5.31)$$

comprovando desta maneira que coincide com (4.25).

Por último vemos que

$$\begin{aligned} G^-(z)G^+(w) &= \frac{2}{(z-w)^3} + \frac{b_1c_1 - \eta_1\xi_1}{(z-w)^2} \\ &\quad + \frac{\left(-b_1\partial c_1 - \partial(\eta_1\xi_1) + T_m - \frac{3}{2}\beta_1\partial\gamma_1 - \frac{1}{2}\partial\beta_1\gamma_1\right)}{(z-w)}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

e de maneira similar aos comutadores anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned} [G_r^-, G_s^+] &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} z^{r+\frac{1}{2}}w^{s+\frac{1}{2}}G^-(z)G^+(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{r+s+1} \left\{T_m - \frac{3}{2}\beta_1\partial\gamma_1 - \frac{1}{2}\partial\beta_1\gamma_1 - b_1\partial c_1 - \partial(\eta_1\xi_1)\right\} \\ &\quad + \left(r + \frac{1}{2}\right)\frac{dw}{2\pi i} w^{r+s} \{b_1c_1 - \eta_1\xi_1\} + \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{r+s-1} \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{r+s+1} \{T(w)\} + \frac{1}{2}(r-s)\frac{dw}{2\pi i} w^{r+s} \{b_1c_1 - \eta_1\xi_1\} + \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{r+s-1} \\ &= L_{r+s} - \frac{1}{2}(r-s)J_{r+s} + \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Então, agora o sistema total incluindo os fantasmas será

$$\left((T_m, G_m), (b_1, c_1), (\eta_1, \xi_1), \phi; (b, c), (\beta^\pm, \gamma^\pm), (\eta, \xi)\right), \quad (5.34)$$

e o operador de BRST para esta supercorda  $N=2$  terá a seguinte forma

$$Q_{N=2} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[ c \left( T + \frac{1}{2} T^{ft} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+ \left( G^- + \frac{1}{2} G^{-ft} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- \left( G^+ + \frac{1}{2} G^{+ft} \right) - \frac{1}{2} \xi \left( J + \frac{1}{2} J^{ft} \right) \right], \quad (5.35)$$

onde os pares  $(b, c)$ ,  $(\beta^\pm, \gamma^\mp)$  e  $(\eta, \xi)$  são os fantasmas de reparametrização, supersimetria e da corrente  $U(1)$  respectivamente, com as seguintes correlações

$$\gamma^\mp(z) \beta^\pm(w) \sim \xi(z) \eta(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad (5.36)$$

onde os geradores com superscript “ft” representam os seguintes geradores fantasmas

$$\begin{aligned} T^{ft} &= -2b\partial c - \partial bc - \frac{3}{2} \beta^+ \partial \gamma^- - \frac{1}{2} \partial \beta^+ \gamma^- - \frac{3}{2} \beta^- \partial \gamma^+ - \frac{1}{2} \partial \beta^- \gamma^+ - \eta \partial \xi, \\ G^{\pm ft} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mp \beta^\pm \xi \mp \partial \eta \gamma^\pm \mp 2\eta \partial \gamma^\pm + 3\beta^\pm \partial c + 2\partial \beta^\pm c - b\gamma^\pm \right), \\ J^{ft} &= \beta^+ \gamma^- - \beta^- \gamma^+ + 2\partial(\eta c). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Se substituirmos (5.25), (5.27) e (5.37) em (5.35) encontraremos

$$\begin{aligned} Q_{N=2} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[ \left( c + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- c_1 \right) T_m + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- \eta_1 e^\phi G_m + bc\partial c - \frac{1}{2} b\gamma^- \gamma^+ \right. \\ &\quad - c \left( \beta^+ \partial \gamma^- + \beta^- \partial \gamma^+ \right) + \frac{1}{2} \partial c \left( \beta^+ \gamma^- + \beta^- \gamma^+ \right) \\ &\quad + c \left( -\frac{3}{2} b_1 \partial c_1 - \frac{1}{2} \partial b_1 c_1 - \frac{3}{2} \eta_1 \partial \xi_1 - \frac{1}{2} \partial \eta_1 \xi_1 - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \partial^2 \phi \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- \left[ c_1 \partial \xi_1 \eta_1 + \partial (c_1 \xi_1 \eta_1) - c_1 \left( \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \partial^2 \phi \right) \right. \\ &\quad \left. - b_1 \eta_1 \partial \eta_1 e^{2\phi} + \partial^2 c_1 + b_1 c_1 \partial c_1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+ b_1 + \frac{1}{2} \xi \left( b_1 c_1 - \eta_1 \xi_1 + \gamma^+ \beta^- - \gamma^- \beta^+ \right) \\ &\quad \left. + c \partial \xi \eta + \frac{1}{2} \eta \left( \gamma^+ \partial \gamma^- - \partial \gamma^+ \gamma^- \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Novamente, igual a seção anterior, requerimos que o operador de BRST (5.38) seja mapeado em uma soma direta da supercorda  $N = 1$  juntamente com setores topológicos através de uma transformação de similaridade

$$e^R Q_{N=2} e^{-R}, \quad (5.39)$$

onde

$$R = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \left( -\gamma^- b + 3\partial c \beta^- + 2c \partial \beta^- + \beta^- \xi + 2\eta \partial \gamma^- + \partial \eta \gamma^+ \right) - \left( 2\eta c + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^- c c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- \eta c_1 \right) (\partial \phi + \eta_1 \xi_1) - \beta^- \gamma^- \eta_1 \partial \eta_1 e^{2\phi} \right], \quad (5.40)$$

A partir daí e usando a fórmula de Beker-Hausdorff em (5.39) obteremos

$$Q_{N=2} + \frac{1}{1!} [R, Q_{N=2}] + \frac{1}{2!} [R, [R, Q_{N=2}]] + \dots = Q_{N=1} + Q_{top} + Q_{U(1)}, \quad (5.41)$$

onde  $R$  foi definido em (5.40) e

$$Q_{top} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+ b_1, \quad (5.42)$$

$$Q_{U(1)} = - \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{2} \xi (\eta_1 \xi_1 + \beta^+ \gamma^-), \quad (5.43)$$

$$Q_{N=1} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left[ c T_m + \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^- \eta_1 e^\phi G_m + bc \partial c - c \beta^+ \partial \gamma^- + \frac{1}{2} \partial c \beta^+ \gamma^- + c \left( -\frac{3}{2} \partial \eta_1 \xi_1 - \frac{1}{2} \eta_1 \partial \xi_1 - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \partial^2 \phi \right) - \frac{1}{2} b (\gamma^-)^2 \eta_1 \partial \eta_1 e^{2\phi} - c (\beta^+ \gamma^- + \eta_1 \xi_1) (\partial \phi + \eta_1 \xi_1) \right]. \quad (5.44)$$

são os operadores de BRST do setor topológico e do setor  $N = 1$  respectivamente.

Vemos que os operadores de BRST  $Q_{N=1}$ ,  $Q_{top}$  e  $Q_{U(1)}$  comutam um com outro ao mesmo tempo que satisfazem a condição de nilpotência. Assim pois vemos que a cohomologia do operador de BRST  $Q_{N=2}$  pode ser obtido da soma direta dos operadores de BRST  $Q_{N=1}$ ,  $Q_{top}$  e  $Q_{U(1)}$ .

Analizemos esta cohomologia mais detalhadamente, observamos que o operador de BRST  $Q_{top}$  impõe os seguintes vínculos:

$$[Q_{top}, \beta^-] = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+ b_1 \beta^-(w) \quad (5.45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} b_1, \quad (5.46)$$

$$[Q_{top}, c_1]_+ = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+ b_1 c_1(w) \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^+. \quad (5.48)$$

onde  $\beta^-$ ,  $\gamma^+$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  desacoplam-se da cohomologia de  $Q_{top}$  e esta está composta somente pelo seu próprio vácuo.

Em seguida vemos que os campos  $\beta^+$ ,  $\gamma^-$  podem ser representados como em (B.8)

$$\beta^+ = \partial\xi^+ e^{-\phi^+}, \quad (5.49)$$

$$\gamma^- = \eta^+ e^{\phi^+}, \quad (5.50)$$

e  $\eta_1$ ,  $\xi_1$ , seguindo a definição de (B.7), como

$$\eta_1 = e^{-\sigma}, \quad (5.51)$$

$$\xi_1 = e^{\sigma}. \quad (5.52)$$

Então podemos observar que

$$Q_{U(1)} = - \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{2} \xi \partial(\sigma + \phi^+). \quad (5.53)$$

Logo

$$[Q_{U(1)}, \sigma(w)] = -\frac{1}{2} \xi(w), \quad (5.54)$$

$$[Q_{U(1)}, \phi^+(w)] = \frac{1}{2} \xi(w), \quad (5.55)$$

indicam que

$$[Q_{U(1)}, \sigma + \phi^+] = 0, \quad (5.56)$$

daí vemos que “ $\sigma + \phi^+$ ” é  $Q_{U(1)}$ -fechado.

Também vemos que

$$[Q_{U(1)}, \eta(w)] = -\partial(\sigma(w) + \phi^+(w)), \quad (5.57)$$

e finalmente combinando (5.56) e (5.57), de acordo com o Apêndice C, deduzimos que “ $\sigma + \phi^+$ ” não está na cohomologia de  $Q_{U(1)}$ .

A partir daí vemos que estes novos campos desacoplam-se do subespaço físico graças ao vínculo imposto pelo operador de BRST  $Q_{U(1)}$  das fórmulas (5.44), logo ficaremos somente com  $(\eta^+, \xi^+)$ .

Depois disso vemos que a relação (5.34) será

$$\left( (T_m, G_m), \phi; (b, c), (\eta^+, \xi^+) \right). \quad (5.58)$$

Obtendo desta maneira nossos campos básicos da teoria superconforme  $N = 1$ .

# Capítulo 6

## CONCLUSÕES

No começo desta dissertação fazemos um resumo das propriedades elementais de uma teoria conforme. E vimos que a corda bosônica é exatamente uma teoria conforme já que esta satisfaz a álgebra de Virasoro. Esta condição vem diretamente da condição de nilpotência do operador de BRST, o qual relaciona a parte de matéria e a parte de fantasmas. Vimos também que no caso da existência de uma e duas supersimetrias e seus respectivos geradores é necessário a condição de nilpotência do operador de BRST para que estes geradores satisfaçam as álgebras superconformes  $N = 1$  e  $N = 2$  respectivamente. A partir daí se deduz que a condição de nilpotência dos operadores de BRST implicam dimensões e cargas centrais críticas.

Depois vimos que no caso  $N = 0 \subset N = 1$ , os campos fermiônicos  $(b_1, c_1)$  são adicionados ao tensor de energia-momento da corda  $N = 0$  com  $c = 26$ . Como consequência disto, a carga central do sistema  $(T_m, (b_1, c_1))$  mudou para  $c = 15$ .

Logo são construídos os geradores da álgebra  $N = 1$  e daí o operador de BRST  $N = 1$ . Note que o gerador de supersimetria tem a seguinte forma

$$G = j_{BRST} + b_1 ,$$

onde  $j_{BRST}$  pertence ao sistema  $(T_m, (b_1, c_1))$ . Finalmente foi demonstrado, com ajuda de uma transformação de similaridade, que, a carga de BRST  $N = 1$  tem a cohomologia equivalente à carga de BRST  $N = 0$ , mostrando desta maneira a equivalência que devem ter os observáveis físicos descritos com ambas teorias.

Observe que a única condição necessária e suficiente para realizar a imersão é que qualquer representação de  $T_m$  tem que satisfazer a álgebra conforme  $N = 0$  com carga central crítica  $c = 26$ .

De forma semelhante ao caso  $N = 0 \subset N = 1$ , no seguinte caso  $N = 1 \subset N = 2$  são adicionados aos geradores  $N = 1$ , os seguintes pares de campos  $(b_1, c_1)$  e  $(\beta_1, \gamma_1)$ , os quais tem pesos conformes iguais e estatística oposta com os fantasmas genuínos de Supersimetria e da corrente  $U(1)$ . Como consequência disso, vemos que a carga central do sistema  $(T_m, G_m)$ ,  $c = 15$ , é mudada para  $c = 6$ .

Em seguida foram construídos os geradores da teoria superconforme  $N = 2$ . A partir daí podemos observar que a torção de spines dos geradores de Supersimetria  $G^-$  e  $G^+$  é realizado pela corrente  $U(1)$ , formando desta maneira a álgebra  $N = 2$ . É interessante notar que neste caso o gerador de supersimetria,  $G^+$ , é igual à corrente de BRST  $N = 1$ . Logo é construído o operador de BRST  $N = 2$ , a partir dos geradores e dos fantasmas  $N = 2$ , e finalmente demonstrado que este operador de BRST  $N = 2$  tem uma cohomologia equivalente ao do operador de BRST  $N = 1$  original. Observe também que neste caso a condição necessária e suficiente é que qualquer representação dos geradores  $T_m$  e  $G_m$  tem que satisfazer a álgebra superconforme  $N = 1$  com carga central 15.

Por tanto foi demonstrado, a nível de operadores, que uma dada teoria de corda bosônica conforme  $N = 0$  com carga central crítica igual a vinte e seis está imersa em uma corda  $N = 1$  superconforme com carga central crítica  $\hat{c} = 10$  e esta na sua vez está imersa numa supercorda  $N = 2$  com carga central crítica  $\hat{c} = 2$ . Cabe notar o papel importante que cumpre o conceito de cohomologia dos operadores de BRST,<sup>1</sup> este pois nos permitiu “identificar” que as cohomologias das cordas especiais  $N = 0$ ,  $N = 1$ ,  $N = 2$  são equivalentes.

Assim pois, de acordo com a classe de imersão pode-se dizer que a classe de cordas  $(2, 2)$  é a corda mais geral, a qual incluiria todas as demais como uma escolha especial de vácuos. Tudo isto nos diz que existe uma hierarquia entre as cordas. Desta maneira vemos que uma

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes veja o Apêndice A

teoria de cordas especial  $N = 2$  pode ser visto como o vácuo das outras cordas.

Para finalizar podemos dizer que aqui foi analisado o método, sob condições determinadas, que nos permitiu interpolar entre as teorias mencionadas, em princípio, diferentes de tal maneira que a relação entre essas teorias resultou ser mais ligada do que se suponha.

# Apêndice A

## LAGRANGEANAS DE PRIMEIRA ORDEM NA TEORIA DE CAMPO EM 2 D

Começaremos escrevendo a ação genérica

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2 z (b \bar{\partial} c), \quad (\text{A.1})$$

onde  $b$  e  $c$  denotam campos conjugados gerais de dimensão “ $\lambda$ ” e “ $1 - \lambda$ ” respectivamente. Eles podem ser campos bosônicos ou Fermiônicos.

O produto de operadores entre  $b$  e  $c$  são:

$$\begin{aligned} c(z)b(w) &\sim \frac{1}{z-w}, \\ b(z)c(w) &\sim \frac{\varepsilon}{z-w}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde,  $\varepsilon = +1$  no caso da estatística de Fermi e  $\varepsilon = -1$  no caso da estatística de Bose. Os campos têm a expansão em modos e a propriedade de hermiticidade

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_n z^{-n-(1-\lambda)} c_n; & c_n^\dagger &= c_{-n}, \\ b(z) &= \sum_n z^{-n-(\lambda)} b_n; & b_n^\dagger &= \varepsilon b_{-n}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e o produto de operadores determina as relações de (anti)comutação

$$c_m b_n + \varepsilon b_n c_m = \delta_{m,-n}. \quad (\text{A.4})$$

O tensor de energia-momento e a álgebra de reparametrizações são

$$\begin{aligned} T &= -\lambda b \partial c + (1 - \lambda)(\partial b)c \\ &= \frac{1}{2}(\partial b c - b \partial c) + \frac{1}{2}\varepsilon Q \partial(bc), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$T(z)b(w) \sim \frac{\lambda}{(z-w)^2}b(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w b,$$

$$T(z)c(w) \sim \frac{1-\lambda}{(z-w)^2}c(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w c,$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{-\varepsilon(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)}{(z-w)^4} + \dots,$$

$$c = \varepsilon(1 - 3Q^2),$$

$$Q = \varepsilon(1 - 2\lambda). \quad (\text{A.6})$$

Outro aspecto do sistema linear é a corrente  $U(1)$  ou “corrente do número fantasma”

$$j = -bc = \varepsilon cb = \sum_n z^{-n-1}j_n,$$

$$j(z)b(w) \sim \frac{-b(w)}{z-w},$$

$$j(z)c(w) \sim \frac{c(w)}{z-w},$$

$$j(z)j(w) \sim \frac{\varepsilon}{(z-w)^2}, \quad (\text{A.7})$$

cujo operador da carga ( $j_0$ ) nos dá o valor da carga  $c = 1$ ,  $b = -1$  de acordo com

$$[j_m, b_n] = -b_{m+n}, \quad (\text{A.8})$$

$$[j_m, c_n] = +c_{m+n}. \quad (\text{A.9})$$

Também pode ser calculado o comportamento à pequenas distâncias da corrente fantasma e do tensor de energia-momento:

$$T(z)j(w) \sim \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{j(z)}{(z-w)^2} + \frac{\partial j}{z-w} \dots \quad (\text{A.10})$$

# Apêndice B

## BOSONIZAÇÃO

Para bosonizar a corrente fantasma, introduzimos na teoria um novo campo  $\phi$  :

$$j = \varepsilon \partial \phi(z) . \quad (\text{B.1})$$

onde  $\varepsilon$  foi definido no apêndice A. O novo objeto que nós vamos investigar é

$$: e^{q\phi} : , \quad (\text{B.2})$$

o qual tem o seguinte comportamento em curtos comprimentos

$$j(z)e^{q\phi(w)} \sim \frac{q}{z-w} e^{q\phi(w)} + \dots . \quad (\text{B.3})$$

Também temos a álgebra deste objeto

$$T(z)e^{q\phi(w)} \sim \left[ \frac{\frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial_w \right] e^{q\phi(w)} + \dots , \quad (\text{B.4})$$

onde

$$T(z) = \frac{1}{2}\varepsilon (j^2(z) - Q \partial j) . \quad (\text{B.5})$$

Em seguida podemos notar a partir de (B.3) e de (B.4) que

$$\begin{aligned} \text{carga}(e^{q\phi}) &= q , \\ \text{peso}(e^{q\phi}) &= \frac{1}{2}\varepsilon q(q+Q) . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A técnica de bosonização também nos permite escrever os campos fermiônicos  $b$  e  $c$  em termos de um campo bosônico escalar  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} b(z) &= e^{-\sigma(z)} . \\ c(z) &= e^{\sigma(z)} . \end{aligned} \tag{B.7}$$

Para provar que ambos campos têm os seus correspondentes pesos conformes corretos, usaremos (B.4) ou (B.6), então vemos que  $e^{q\sigma}$  tem peso conforme  $\frac{1}{2}q(q-3)$ . Daqui deduzimos que para o valor de  $q = -1$  o campo  $e^{-\sigma}$  tem peso 2 mas para  $q = 1$  o campo  $e^{-\sigma}$  tem peso  $-1$ , a partir daí deduzimos que eles têm o peso conforme correto e igual aos de  $b$  e  $c$ .

Para escrever campos comutantes em termos dos campos anticomutantes fazemos uso da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-\phi} \partial \xi , \\ \gamma &= e^{\phi} \eta , \end{aligned} \tag{B.8}$$

onde vemos que, no lado esquerdo destas últimas existem campos comutantes e no lado direito temos o produto de dois campos anticomutantes; ou seja  $\xi$  e  $\eta$  são também campos anticomutantes.

Em vista que  $\xi$  e  $\eta$  são campos fermiônicos, assim pois podemos bosonizá-los expressando estes dois campos anticomutantes em termos de um boson escalar  $\chi$  :

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\chi} , \\ \eta &= e^{-\chi} . \end{aligned} \tag{B.9}$$

Pode-se também mostrar que

$$\phi(z)\phi(w) = \varepsilon \log(z-w) . \tag{B.10}$$

Embora a teoria conforme tem a grande vantagem de que todos os seus campos são livres, teremos que pagar um pequeno preço que consiste em seguir os rastros de todos estes cam-

pos livres. Daqui vemos que é extremamente importante manter todos estes campos bosônicos claramente definidos, os quais vamos descrever na seguinte tabela:

Boson	Carga	Anomalia	Peso Conforme (h)
$\phi$	$Q = 2$	$c=13$	$h(e^{q\phi}) = -\frac{1}{2}q(q+2)$
$\chi$	$Q = -1$	$c=-2$	$h(e^{q\chi}) = \frac{1}{2}q(q-1)$
$\sigma$	$Q = -3$	$c=-26$	$h(e^{q\sigma}) = \frac{1}{2}q(q-3)$

**Tabela B.1:** Note que o peso conforme dos respectivos exponenciais estão baseados nos pesos conformes dos respectivos campos comutantes e anticomutantes através das fórmulas (A.6) e (A.10).

# Apêndice C

## COHOMOLOGIA DE BRST

Os geradores da simetria de BRST estão construídos da seguinte maneira:

\* A cada gerador de gauge  $G_a$  associamos um par canônico conjugado de fantasmas  $(c, b)$  onde

$$[b_a, c^b] = -\delta_a^b, \quad (\text{C.1})$$

e o número fantasma deve ser

$$gh(c^a) = 1 = -gh(b_a), \quad (\text{C.2})$$

estes fantasmas e os momentos fantasmas são escolhidos para ter uma paridade Grassmaniana  $(\varepsilon)$  oposta à paridade Grassmaniana dos vínculos:

$$\varepsilon(c^a) = \varepsilon_a + 1 = \varepsilon(b_a), \quad (\text{C.3})$$

onde  $\varepsilon \equiv \varepsilon(G_a)$ .

A simetria de BRST é determinada pelos seguintes requerimentos:

i) A transformação de BRST é uma transformação de gauge, na qual os parâmetros infinitesimais são substituídos pelos fantasmas. Isto quer dizer que

$$Q = G_a c^a + \text{termos de fantasmas de ordem superior}, \quad (\text{C.4})$$

já que os  $G_a$ 's são geradores infinitesimais das transformações de gauge.

ii) Os termos superiores de fantasmas em (i) são determinados pela demanda que  $Q$  seja nilpotente

$$[Q, Q] = 0 . \quad (C.5)$$

iii) Também precisamos que  $Q$  seja um gerador fermiônico

$$\varepsilon(Q) = 1 . \quad (C.6)$$

iv)  $Q$  deve ter o número fantasma igual a 1

$$gh(Q) = 1 . \quad (C.7)$$

Já que a carga de BRST é nilpotente então podemos definir sua cohomologia

\* Uma função  $A(q, p, c, b)$  se diz que é BRST-fechada se esta é BRST invariante:

$$[A, Q] = 0 \quad (\text{BRST-fechada, } A \in \text{Ker}Q) . \quad (C.8)$$

\* Esta mesma função é exata se ela pode ser escrita como

$$A = [B, Q] \quad (\text{BRST-exata, } A \in \text{Im}Q) . \quad (C.9)$$

As funções BRST-exatas são BRST-fechadas, então o espaço físico estará dado por  $\left( \frac{\text{Ker}Q}{\text{Im}Q} \right)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Green, J. Scharwz, Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Univ. Press, (1986).
- [2] Michio Kaku, *Strings, Conformal Fields, and Topology - An Introduction*, Springer Verlag, (1991).
- [3] Serguei V. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific, (1995).
- [4] Joseph Polchinski, hep-th 9411028 (1994).
- [5] Nathan Berkovits, Cumrun Vafa, Mod. Phys. Lett. A, Vol 9,  $N_0$  7 (1994) 653-663.
- [6] Hiroshi Ishikawa, Mitsuhiro Kato, preprint UT-Komaba/93-23, hep-th 9311139 (1993).
- [7] Nobuyoshi Ohta, Jens Lyng Petersen, preprint NBI-HE-93-76, hep-th 9312187 (1993).
- [8] Paul Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, in the proceedings of the Les Houches school on Fields, Strings and Critical Phenomena, 1988).
- [9] Elias Kiritsis, CERN-TH 97-218, hep-th 9312187 (1993).
- [10] A.N.Schellekens, *Introduction to Conformal Field Theory*.
- [11] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. 241 (1984) 333.
- [12] Michio Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer Verlag, (1988).
- [13] P. Di Francesco, P. Mathie, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer Verlag, (1997).

- 
- [14] Amit Giveon, Martin Roček, hep-th 9302049.
- [15] D.Friedan, E.Martinec, S.Shenker, Nucl. Phys. *B271* (1986) 93-165.
- [16] J. Gomis, H. Suzuki Physics Letters *B278* (1992) 266-270.
- [17] M. Ademollo and others, Nucl. Phys. *B111* (1976) 77-110.
- [18] V. Koctelecký, O. Lechtenfeld, W. Lerche, Nucl. Phys. *B288* (1987) 173-232.
- [19] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. *B361* (1991) 469.
- [20] I. Batalin, G. Vilkovisky, Phys Lett. 69B (1977) 309; E. Fradkin, G. Vilkovisky, Phys Lett. 73B (1978) 209.

