153

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT–D.004/98

Aplicações Físicas dos Polinômios de Bell

Luciene Pontes Freitas

Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi

Agosto - 1998

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos aqueles que, nos últimos anos, contribuiram, pessoal ou profissionalmente, para a realização desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Ruben Aldrovandi, cuja influência na minha formação se estende para além dos limites desta tese. Pelas enriquecedoras discussões, e pelo apoio, em todos os momentos.

Aos meus pais e a minha avó, pelo incansável apoio e incentivo.

Aos amigos de todas as horas: Ana Lucia Barbosa, Randall Guedes Teixeira e Orlando Luis Goulart Peres.

A Profa. Renata Zukanovich Funchal, por sua colaboração profissional e inestimável amizade.

Ao Prof Sérgio Novais, por sua solicitude.

A Cris, Josi e ao Cadu, pela alegria e força, sempre. A Carla, Getúlio e Nylssea, pela acolhida e agradáveis momentos. A Jacy, pelas polêmicas e divertidas discussões. Ao Calvin e a Magali, pela companhia e afeto.

Aos funcionários do IFT que abreviaram o tempo nas tarefas diárias.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Abstract

In this work some aplications of Bell polynomials and matrices are exhibited. A simple procedure to obtain complete expressions for Lie algebra invariants is presented. Such a procedure is very useful to verify calculations of the respective finite group elements. As an ilustration, the invariants of $SU(3)$ and Lorentz groups are calculated. For the latter, the general form of an element group is computed. In another approach, the Bell polynomials formalism is used to give a precise meaning to the notion of continuous iteration of a dynamical mapping. An application, using a naive model of turbulent flow, is shown.

Key words : Bell Polynomials, Lie algebras, Lie Groups, invariant polynomials, dynamical maps, continuous iteration, dynamical flow, turbulence.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações dos polinômios e das matrizes de Bell. É mostrado um procedimento simples que leva a expressões fechadas para os invariantes de álgebras de Lie, e que é de grande utilidade na verificação dos cálculos dos elementos finitos dos respectivos grupos. Como ilustração , os invariantes são calculados para o $SU(3)$ e o grupo de Lorentz. Para este último, é computada a forma geral de um elemento de grupo. Numa outra direção, o formalismo é empregado para se obter uma noção precisa de iterada contínua de um mapeamento dinâmico, noção esta que é, a seguir, aplicada a um modelo ingênuo para a turbulência desenvolvida.

Palavras-Chaves : Polinômios de Bell, álgebras de Lie, grupos de Lie, polinômios invariantes, mapas dinâmicos, iteração contínua, fluxo dinâmico, turbulência.

Área(s) de Conhecimento : 1.05.01.01-0,

Índice

Introdução

Os polinômios de Bell (PB) aparecem freqüentemente nos textos de análise combinatória. Eles são uma poderosa ferramenta para escrevermos, de uma forma compacta, os coeficientes das séries que representam as funções compostas. Nosso estudo explora desde aplicações matemáticas puramente formais, como reescrever expressões já conhecidas em análise e álgebra, até aplicações físicas.

Durante este trabalho, freqüentemente nos deparamos com problemas que advinham da riqueza de informações contidas nesse formalismo, em como explorá-las e interpretá-las adequadamente. Os exemplos escolhidos para serem apresentados nessa tese são aqueles que, além de demostrarem o poder do método, são os mais didáticos, no sentido de tornar menos cansativa a leitura da mesma.

Nos dois primeiros capítulos, apresentamos a definição e algumas propriedades dos PB, indispensáveis às aplicações que são feitas nos capítulos que se seguem. No Capítulo 1, além da definição, introduzimos uma representação matricial para esses polinômios e mostramos que esta constitui um subgrupo associado às séries invertíveis. Segue-se daí uma das mais importantes propriedades das matrizes de Bell: elas representam a operação de composição do grupo das séries através do produto de matrizes.

No capítulo 2, são dadas as aplicações mais formais destes polinômios. Nele, determinantes e traços de matrizes, funções simétricas, e os invariantes *básicos* de uma matriz $\mathbf{A}$ (que são os coeficientes do polinômio característico, $\Delta(\lambda)$, associado à matriz característica, $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$) são representados por séries cujos coeficientes são os PB. Algumas identidades entre estas quantidades foram encontradas.

No capítulo 3, inicialmente, defimos as funções de matrizes, $F(\mathbf{A})$, em termos de projetores, $\mathbf{Z}_k(\mathbf{A})$. É apresentada então a primeira aplicação física dos PB: dado um membro de uma álgebra de Lie, $\mathbf{A} = \omega^a \mathbf{J}_a$ (com ω^a as componentes de $\mathbf{A}$ na base $\{\mathbf{J}_a\}$), seus invariantes são os coeficientes de seu polinômio característico. Estes invariantes são polinômios nos traços de potências de **A**, e nosso método simplifica muito a sua obtenção, e são de interesse cada vez maior à medida que aumenta o rank das matrizes em questão. Como exemplos, calculamos os invariantes para os grupos $SU(3)$ e de Lorentz, além de uma expressão geral para um elemento do grupo de Lorentz.

No capítulo 4, apresentamos aquela que talvez seja a mais interessante aplicação dos PB: obtém-se uma versão contínua para as iterações discretas, $f^{<n>}(x)$, de uma aplicação dinâmica. As iterações de uma função f são representadas por potências de sua matriz de Bell. Estas potências podem ser interpoladas, e isso leva a uma versão contínua das iterações de f, preservando a idéia de iteração. Quando a iteração contínua, $f^{<t>}(x)$, é escrita separando-se suas dependências espacial e "temporal", vê-se que esta decomposição é feita em modos independentes, $R_k(x)$, um para cada projetor da matriz de Bell correspondente. Este resultado é aplicado a um modelo simples para o campo de velocidades de um fluxo em regime de turbulência desenvolvida.

Capítulo 1

Polinômios de Bell

1.1 Definições

Nos textos de análise combinatória [1, 2], os polinômios de Bell aparecem na fórmula de Fàa di Bruno para a função de função. Os coeficientes de uma função composta, quando representada por sua série de Taylor, são polinômios nas derivadas das funções que a compõem. A estes polinômios chamamos *"Polinômios de Bell"* [3]. Suas aplicações físicas têm sido principalmente ligadas a problemas de análise combinatória, e em mecânica estatística [4]. Vamos aqui nos ater a séries formais, o que implica que não estaremos preocupados com a convergência das mesmas. Por simplidicade, no entanto, chamá-las-emos de "funções". Sejam $f(u)$ e $g(t)$ duas de tais funções, satisfazendo ademais a condição $f(0) = g(0) = 0$, ou seja, dadas por

$$f(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{m!} u^m \tag{1.1}$$

$$g(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{m!} t^m \tag{1.2}$$

e tais que os coeficientes f_m e g_m são as derivadas de f e g na origem.

Definindo $F(t)$ como a composição dessas duas funções, ou seja, $F(t) = f \circ g = f[g(t)]$, teremos

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F_n[f; g]. \tag{1.3}$$

Os coeficientes $F_n[f; g]$, incluem as derivadas de ordem superior das funções que compõem $F(t)$, e são dados pela fórmula de Faà di Bruno como

$$F_n[f;g]=\sum_{l=1}^{n} f_l B_{nl}(g_1,g_2,...,g_{n-l+1}). \tag{1.4}$$

O que conhecemos como *"Polinômio de Bell Completo"*, $Y_n = Y_n(g_1, g_2, ..., g_n)$, é definido por

$$Y_n=\sum_{l=1}^{n} B_{nl}(g_1,g_2,...,g_{n-l+1}); \qquad Y_0 := 1. \tag{1.5}$$

enquanto os números B_{nl} são conhecidos por *"Polinômios de Bell Parciais"*. Estes últimos, dependentes exclusivamente das derivadas de g, são os objetos de nosso interesse. Nós os chamaremos simplesmente de *"Polinômios de Bell"* (PB) e adotaremos as seguintes notações equivalentes:

$$\begin{aligned} B_{nl}[g(t)] &= B_{nl}(g_1,g_2,...,g_{n-l+1}) = B_{nl}(g_1,g_2,...) \\ &= B_{nl}\{g(t)\} = B_{nl}[g] \end{aligned} \tag{1.6}$$

Escrevendo os primeiros termos para $F_n[f;g]$ podemos observar a independência de B_{nl} da função f e suas derivadas

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1(g_1) \\ F_2 &= f_1(g_2)+f_2\left(g_1^2\right) \\ F_3 &= f_1(g_3)+f_2(3g_1g_2)+f_3\left(g_1^3\right) \\ F_4 &= f_1(g_4)+f_2\left(4g_1g_3+3g_2^2\right)+f_3\left(6g_1^2g_2\right)+f_4\left(g_1^4\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Este fato nos possibilta fazer uma escolha conveniente de $f(u)$ para finalmente calcularmos B_{nl}. Tomemos $f(u)=\exp(au)-1$. A série de Taylor correspondente a $F(t)$ é

$$F(t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a^l}{l!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j!}tj\right)^l. \tag{1.8}$$

Uma outra forma de escrevermos $F(t)$ é, usando (1.4) em (1.3),

$$F(t)=\sum_{l=1}^{\infty}a^l\sum_{n=l}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B_{nl}\left[g(t)\right]. \tag{1.9}$$

Comparando (1.8) e (1.9) temos o *"teorema multinomial"*

$$\frac{1}{l!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j!}tj\right)^l=\sum_{n=l}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B_{nl}\left[g\left(t\right)\right]. \tag{1.10}$$

Este teorema desempenha um importante papel nas aplicações dos PB: através dele todas as propriedades destes podem ser obtidas. De imediato podemos escrevê-los como coeficientes de Taylor correspondentes à função exibida do lado esquerdo de (1.10)

$$B_{nl}\left[g\left(t\right)\right]=\frac{1}{l!}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j!}tj\right)^l\right]_{t=0}. \tag{1.11}$$

Sua expressão exata é:

$$B_{nl}\left[g\right]=\sum_{\{\nu_i\}}{}''\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}\nu_j!\left(j!\right)^{\nu_j}}g_1^{v_1}g_2^{v_2}...g_n^{v_n}. \tag{1.12}$$

com $\sum''$ significando que essa soma deve ser efetuada sob todos os conjuntos $\{\nu_i\}$ de inteiros não-negativos que satisfazem simultaneamente às duas condições:

$$\sum_{j=1}^{n}j\nu_j = n; \tag{1.13}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\nu_j = l.$$

Observe-se que em (1.12) o fator $\frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j!)^{\nu_j}}$ conta o número de modos de separarmos $[n]$ em ν_j agregados de j componentes e a divisão pelo fator $\prod_{j=1}^{n}\nu_j!$ significa que consideramos indistinguíveis os agregados de mesmo 'tamanho'.

Nós podemos introduzir em (1.8) uma função geratriz dupla, tal que $f\left(u\right)=\exp\left[ug\left(t\right)\right]-1$. Teremos então

$$\exp\left[ug\left(t\right)\right]-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Y_n\left(u;g\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=1}^{n}u^jB_{nj}\left[g\right]. \tag{1.14}$$

Por uma questão de conveniência, podemos estabelecer a convenção $B_{n0}[g] = \delta_{n0}$ para qualquer g. Assim, podemos escrever (1.14) iniciando a soma de $n = 0$,

$$\exp[ug(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Y_n(u; g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^{n} u^j B_{nj}[g]. \tag{1.15}$$

1.2 Propriedades

O número de equações envolvendo os B_{nl} limita-se a nossa imaginação em aplicar sua definição aos mais variados casos. Podemos, por exemplo, associá-los aos coeficientes dos polinômios usuais conhecidos: Legendre, Hermite, etc. Isso torna muito vasto o número de equações que poderíamos apresentar aqui. Nos restrigiremos àquelas que são fundamentais para o entendimento dos futuros capítulos. Como dissemos anteriormente, as propriedades dos PB são obtidas imediatamente do teorema multinomial. Façamos em (1.10) uma mudança de variáveis $t \rightarrow at$, ou seja

$$B_{nl}[g(at)] = B_{nl}(ag_1, a^2 g_2, ...) = B_{nl}\{a^j g_j\} = a^n B_{nl}\{g_j\},$$

assim,

$$B_{nl}[g(at)] = a^n B_{nl}[g(t)]. \tag{1.16}$$

Outras propriedades podem ser obtidas:

$$B_{nl}[ag(t)] = a^l B_{nl}[g(t)]; \tag{1.17}$$

$$B_{n1}[g] = g_n; \tag{1.18}$$

$$B_{nn}[g] = (g_1)^n; \tag{1.19}$$

$$B_{n2}[g] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} g_j g_{n-j}. \tag{1.20}$$

tal que a é uma constante e $\binom{n}{j}$[1] o que conhecemos nos livros textos básicos como "coeficiente binomial" dado por $\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$. Algumas delas poderão

[1]Essa quantidade expressa o número de maneiras de se escolher j objetos de uma coleção de n objetos distintos sem considerar a ordem.

ser verificadas de uma forma mais direta quando definirmos uma representação matricial para os B_{nl}. Temos ainda algumas outras relações, que não resistimos à tentação de apresentar

$$B_{nl}(0,0,...,0,x_j,0,...) = 0 \text{ exceto para } B_{jl,l} = \frac{(jl)!}{l!\,(j!)^l} x_j^l;$$

$$\begin{aligned} B_{nl}(x_1, x_2, ...) &= \sum_{j=0}^{l} \binom{n}{j} x_1^j B_{n-j,l-j}(0, x_2, x_3, ...) \qquad (1.21) \\ &= \sum_{j=0}^{l} \frac{n!}{(n-l)!l!} x_1^j B_{n-j,l-j}\left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right); \end{aligned}$$

$$B_{nl}\left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right) = \frac{n!}{(n+l)!} B_{n+l,l}(0, x_2, x_3, ...). \qquad (1.22)$$

Nesse ponto torna-se interessante introduzirmos uma terminologia que usaremos com freqüência. Chamaremos *"alfabeto"* qualquer conjunto $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$, o qual também pode ser representado por $\mathbf{x} = \{x_k\} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$. Estamos adotando a convenção de letras minúsculas em negrito para representar o alfabeto. A cada x_j chamamos *"letra"*. Assim, um monômio é chamado de uma "palavra". Um alfabeto pode, em princípio, ser infinito. Dadas essas definições um PB, $B_{nl}[g]$, é uma função de um alfabeto g com $(n-l+1)$ letras. Se num dado $B_{Nm}(g_1, g_2, ..., g_k, 0, 0, ...)$ todas as letras à partir de um k-ésimo grau do polinômio g forem zero então poderemos escrevê-lo como

$$B_{Nm}(g_1, g_2, ..., g_k, 0, 0, ...) = B_{Nm}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{g_j}{j!} t^j\right], \qquad (1.23)$$

com N definido no intervalo $km \le N \le m$. Aplicada à função identidade $g(x) = Id(x) = x$, teremos

$$B_{Nm}[g(x) = x] = B_{Nm}(1, 0, 0, ...) = \delta_{Nm}. \qquad (1.24)$$

Uma outra relação interessante é

$$B_{nl}[f(t) + g(t)] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \binom{n}{j} B_{jk}[f]\, B_{n-j,l-k}[g]. \qquad (1.25)$$

1.3 Formalidades

Começaremos aqui a introduzir a idéia de grupo associada a essas séries, e consequentemente aos B_{nk}, que mais tarde darão suporte às aplicações que daremos ao formalismo dos PB. Até aqui podemos fazer as seguintes observações: (i) as séries formais das definições (1.1) e (1.2) tais que $f_1 \neq 0$ e $g_1 \neq 0$, são invertíveis; (ii) tais séries constituem um grupo sob a operação de composição $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$; (iii) a identidade do grupo é uma série, $e(t) = t$, tal que para todos os elementos g pertencentes ao grupo, $g[e(t)] = g(t)$; (iv) além disso, para cada elemento g existe um elemento inverso $g^{<-1>}$ com $g^{<-1>} \circ g = g \circ g^{<-1>} = e$.

O exemplo mais simples, porém muito ilustrativo, do que dissemos é o das séries

$$f(u) = \exp(u) - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j}{j!}, \tag{1.26}$$

cuja inversa é

$$g(x) = \ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-)^{j-1} \frac{x^j}{j}. \tag{1.27}$$

As funções geratrizes dos números de Stirling[5] de primeiro tipo [2], $s_k^{(j)}$, são

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1) = \binom{x}{k} k! = \sum_{m=0}^{k} s_k^{(m)} x^m \tag{1.28}$$

e

$$\frac{1}{k!}[\ln(1+x)]^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n!} s_n^{(k)} \tag{1.29}$$

De (1.10) temos que

$$B_{nk}[\ln(1+x)] \quad = \quad s_n^{(k)}$$

[2] O módulo $(-)^{n+m} s_n^{(m)}$ é o número de permutações de n letras que têm $k-$ciclos.

$$
\begin{aligned}
&= B_{nk}\,(0!,-1!,2!,-3!,...) \\
&= B_{nk}\left\{(-)^{j-1}\,(j-1)!\right\}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Usando as propriedades enunciadas em (1.16) e (1.17) temos [3], para os números se Stirling de primeiro tipo sem sinal, que

$$
B_{nk}\,(0!,1!,2!,3!,...) = (-)^{n+k}\,B_{nk}\,\{(j-1)!\} = (-)^{n+k}\,s_n^{(k)} = \left|s_n^{(k)}\right|. \qquad (1.31)
$$

As funções geratrizes dos números de Stirling de segundo tipo [4], $S_k^{(j)}$ são

$$
x^k = \sum_{m=0}^{k} S_k^{(m)}\,x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-m+1) \qquad (1.32)
$$

e

$$
\frac{1}{k!}\,[\exp(u)-1]^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{u^n}{n!} S_n^{(k)}. \qquad (1.33)
$$

Nesse caso, tal qual para os número de Stirling de primeiro tipo, temos

$$
B_{nk}\,[\exp(u)-1] = B_{nk}\,(1,1,1,...,1) = B_{nk}\,\{1\} = S_n^k. \qquad (1.34)
$$

A partir do teorema multinomial é possível calcular os coeficientes de séries em que $f = g$, ou as derivadas de $f \circ f$, que denotaremos por $f^{<2>}$. Esta é a função f iterada uma vez. Para um número $n-1$ de iterações teremos $f^{<n>}$.

$$
f^{<n>} = f^{<n-1>} \circ f = f \circ f^{<n-1>}.
$$

No caso em que n é inteiro obtemos $f^{<n>}$ diretamente com o que já foi definido nesse capítulo. Podemos ir além e considerar o caso em que $n = \alpha$, real. Isso faremos, mais cuidadosamente, nos capítulos que seguirão.

[3] Para isso façamos os seguintes passos:
$(-)^k\,B_{nk}\left[(-)^{j-1}\,(j-1)!\right] = B_{nk}\left[(-)\,(-)^{j-1}\,(j-1)!\right] = B_{nk}\left[(-)^j\,(j-1)!\right] =$
$(-)^k\,(-)^n\,B_{nk}\,[(j-1)!] = (-)^{n+k}\,B_{nj}\,(0!,1!,2!,...)$.

[4] $S_k^{(j)}$ é o número de maneiras de se fazer a partição de um conjunto de k elementos em j subconjuntos não vazios.

1.4 Representação Matricial

A cada série g associamos uma matriz $\mathbf{B}[g]$, tal que seus elementos são os B_{nk}

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}[g] \equiv \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \cdots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Representaremos as matrizes por letras maiúsculas em negrito.

Dessa forma observamos que os PB constituem uma representação matricial, de matrizes triangulares inferiores $\mathbf{B}[g]$, de g. Para cada elemento dessa matriz está associado um desses polinômios B_{nk}, cujos índices n e k indicam e linha e a coluna, respectivamente. Podemos escrever a forma explícita dos elementos de $\mathbf{B}[g]$

$$\mathbf{B}[g] = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1^2 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ g_3 & 3g_1g_2 & g_1^3 & 0 & & \cdots & 0 \\ g_4 & 4g_1g_3+3g_1^2 & 6g_1^2g_2 & g_1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ g_5 & 5g_1g_4+10g_2g_3 & 10g_1^2g_3+15g_1g_2^2 & 10g_1^3g_2 & g_1^5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & & & g_1^N \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Essa descrição de $g(t)$ é mais que completa, no sentido que os coeficientes de Taylor de sua série ocupam a primeira coluna de (1.36), de acordo com (1.18). Da mesma forma observamos que à segunda coluna correspodem os coeficientes de Taylor da série de $\frac{1}{2!}g^2(t)$, à terceira os coeficientes de $\frac{1}{3!}g^3(t)$, e generalizando, à j -ésima coluna correspondam os coeficientes da série de $\frac{1}{j!}g^j(t)$. Estejamos atentos às diferentes notações para a k-ésima potência da série de g, $g^k(t)$, e a sua k-ésima iterada, $g^{<k>}(t)$.

As matrizes triangulares constituem um grupo. O conjunto de matrizes $\mathbf{B}[g(t)]$ associado a todas as séries invertíveis $g(t)$ constituem um subgrupo. Segue-se daí uma das mais interessantes propriedades dos PB: a operação de composição do grupo das séries é representada por um produto de matrizes da seguinte forma

$$\mathbf{B}[f \circ g] = \mathbf{B}[g]\,\mathbf{B}[f]\,. \tag{1.37}$$

A demonstração dessa propriedade é simples. Usando (1.10) podemos escrever para a composição $F(t) = f \circ g = f[g(t)]$

$$\frac{1}{k!}\left(f[g(t)]\right)^k = \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j}{j!}[g(t)]^j\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{[g(t)]^n}{n!}B_{nk}[f]\,. \tag{1.38}$$

Novamente usando o teorma multinomial para escrevermos $\frac{[g(t)]^n}{n!}$, temos

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[\sum_{m=n}^{\infty}\frac{t^m}{m!}B_{mn}[g]\right]B_{nk}[f] = \sum_{m=n}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{n=k}^{m}B_{mn}[g]\,B_{nk}[f]\,. \tag{1.39}$$

É fácil identificar que

$$B_{mk}[f[g(t)]] = \sum_{n=k}^{m}B_{mn}[g]\,B_{nk}[f]\,, \tag{1.40}$$

que é (1.37). Da mesma forma, usando o teorema multinomial correspondente ao número de composições que temos, a propriedade de associatividade pode ser demonstrada, ou seja, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. A identidade do grupo corresponde a $\mathbf{B}[e(t) = t] = \mathbf{I}$, já que de (1.24) $B_{nk}[e(t) = t] = \delta_{nk}$. Portanto, as matrizes de Bell infinitas são uma representação linear do grupo das séries formais invertíveis. Um aspecto interessante dessa representação é que, se considerarmos uma aproximação dessas séries por polinômios com seus N primeiros termos, as propriedades de grupo se mantém a cada ordem. Apesar de não serem matrizes normais, ou seja, diagonalizáveis por uma transformação UBU^{-1}, os autovalores das matrizes de Bell são conhecidos. Porém, à partir deles não é possível encontarmos um conjunto completo de autovetores ortogonais. Um outro aspecto interessante dessa representação é que as inversas das funções do grupo, $f^{<-1>}$, podem agora ser obtidas de uma forma direta: através da inversão de matrizes. De (1.37), temos

$$\mathbf{B}\left[f \circ f^{<-1>}\right] = \mathbf{B}\left[f^{<-1>}\right]\mathbf{B}[f] = \mathbf{I}. \tag{1.41}$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{B}\left[f^{<-1>}\right] = \mathbf{B}^{-1}[f]. \tag{1.42}$$

As séries inversas são obtidas usando a fórmula de inversão de Lagrange [6, 7]. Uma demonstração construtiva, usando o formalismo dos PB para essas séries, é dada na referência [4].

Desejamos encontrar a função $f(x) = g^{<-1>}(x)$. Para $F(t) = [f \circ g](t) = f[g(t)]$, usando a propriedade (1.18) em (1.4), temos

$$F_n[f;g] = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{nk}[g] = \sum_{k=1}^{n} B_{nk}[g] B_{k1}[f] = B_{n1}[f \circ g]. \tag{1.43}$$

Assim, a série f será a inversa de g se

$$\sum_{k=1}^{n} f_k B_{nk}[g] = \delta_{n1}. \tag{1.44}$$

Para $n = 1$, $f_1 = \frac{1}{g_1}$. Para $n \geq 2$, usando (1.20), temos uma fórmula de recorrência

$$f_n = -\frac{1}{g_1^n} \sum_{k=1}^{n-1} f_k B_{nk}[g]. \tag{1.45}$$

Como resultado, após um longo e trabalhoso cálculo, do qual exibiremos apenas a forma final, temos

$$\begin{aligned}
g_n^{<-1>} &= \frac{1}{g_1^n} \sum_{k=1}^{n-1} (-)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} B_{n-1,k}\left(\frac{g_2}{2g_1}, \frac{g_3}{3g_1}, \frac{g_4}{4g_1}, \ldots\right) && (1.46)\\
&= \frac{1}{g_1^n} \sum_{k=1}^{n-1} (-)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} B_{n-1,k}\left[\frac{g_{k+1}}{g_1^{k+1}(k+1)}\right] && (1.47)\\
&= \frac{1}{g_1^n} \sum_{k=1}^{n-1} (-)^k n^k B_{n-1,k}\left[\ln \frac{g(t)}{g_1 t}\right]. && (1.48)
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Algumas Aplicações

2.1 Determinantes e Traços

Para que possamos apresentar algumas aplicações dos PB precisamos, além das propriedades e definições apresentadas no Capítulo 1, introduzir as propriedades de matrizes, e suas funções. Existem importantes relações entre o determinante, os menores principais e os traços de potências de uma matriz A[8]. Se a matriz é diagonal, essas relações se reduzem àquelas envolvendo os principais tipos de funções simétricas. Isto inclui a conhecida fórmuta de Viète que relaciona raízes e coeficientes de um polinômio. Nossa apresentação começa pelas funções simétricas, pois elas nos ajudam a visualizar as relações mais gerais envolvendo os PB, que parecem ser pouco conhecidas. Além disso, elas valem para matrizes não diagonalizáveis, ou não normais, como é o caso das matrizes de Bell.

Comecemos pela expressão formal $\det X = \exp\{\mathrm{tr}[\ln X]\}$. Usando a expansão $\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-)^{j-1}}{j} x^j$, de acordo com (1.3) e usando (1.15) e (1.30), temos

$$\det[\lambda \mathbf{I} + z\mathbf{A}] = \sum_{j=0}^{N} \frac{z^j \lambda^{N-j}}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{(-)^{k-1}(k-1)!\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^k\right)\right\}. \tag{2.1}$$

Esta equação é um polinômio de duas variáveis, e nós o denotaremos por

$$\Delta_A(\lambda, z) = \det[\lambda \mathbf{I} + z\mathbf{A}]. \tag{2.2}$$

Note que $\Delta_A(\lambda, z)$ é o polinômio característico da matriz $(-z\mathbf{A})$. O polinômio característico de $\mathbf{A}$ será dado por $\Delta_A(\lambda, -1)$ e $\Delta_A(1, z)$ será a função geratriz dos produtos simétricos dos auto-valores de $\mathbf{A}$. Uma relação particularmente interessante é obtida quando escolhemos $\lambda = 0$ e $z = 1$

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{N} B_{Nm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathtt{tr} \left(\mathbf{A}^k \right) \right\} \tag{2.3}$$

cuja inversa é

$$\mathtt{tr} \left(\mathbf{A}^n \right) = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-)^{k-1} (k-1)! B_{nk} \left\{ j! \det{}_j \mathbf{A} \right\}. \tag{2.4}$$

O significado de $\det{}_j$ tornar-se-á claro quando introduzirmos as funções simétricas: ele é a soma de todos os menores principais de ordem j de $\mathbf{A}$[9].

2.2 As Funções Simétricas

Uma função simétrica em N variáveis $x_1, x_2, ..., x_N$ é um polinômio $P(x_1, x_2, ..., x_N)$ que é invariante sob a permutação dos $x_k's$ [1, 2, 8]. Em outras palavras, podemos dizer que uma função simétrica é um polinômio $F(\mathrm{x})$ cujo valor é o mesmo para qualquer palavra formada pelo alfabeto x. Apresentaremos as principais famílias de tais funções:

i) $\mathsf{e}_j[\mathrm{x}]$, a *j-ésima função simétrica elementar* é a soma de todas as palavras distintas com j fatores formada com as N variáveis, $\mathsf{e}_j[\mathrm{x}] = \sum^{(N)} x_1, x_2, ..., x_j$. Alguns exemplos são:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{e}_0[\mathrm{x}] & = & 1 \text{ (por convenção)} \\ \mathsf{e}_1[\mathrm{x}] & = & x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N; \\ \mathsf{e}_2[\mathrm{x}] & = & x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_N + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_{N-1}x_N; \\ ... & & \\ \mathsf{e}_N[\mathrm{x}] & = & x_1x_2x_3...x_N. \end{array} \tag{2.5}$$

Se os $x_k's$ são os auto-valores de uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem N, então $\mathsf{e}_N[\mathrm{x}] = \det \mathbf{A}$. A função geratriz de $\mathsf{e}_j[\mathrm{x}]$ é dada por

$$\Sigma[\mathrm{x}; t] = \sum_{n=0}^{N} \mathsf{e}_n[\mathrm{x}] t^n = \prod_{n=1}^{N} (1 + x_n t). \tag{2.6}$$

O teorema fundamental das funções simétricas diz que os $\mathrm{e}_j's$ são algebricamente independentes e que qualquer função simétrica nas variáveis $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ pode ser escrita em termos dos $\mathrm{e}_j's$. Nesse sentido, $\{\mathrm{e}_j\}$ constitui uma base. Para $N \to \infty$, isso significa que, qualquer série formal $f(t)$ pode ser vista como a função geratriz $\Sigma[\mathrm{x}; t]$ para uma escolha conveniente do alfabeto $\mathrm{x} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

ii) $\mathrm{h}_k[\mathrm{x}]$ é a *função simétrica homogênea.* Apesar de similares às $\mathrm{e}_j's$ estas incluem repetições. Para N=3 os primeiros exemplos são

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_1[\mathrm{x}] &= x_1 + x_2 + x_3; \\
\mathrm{h}_2[\mathrm{x}] &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \\
\mathrm{h}_3[\mathrm{x}] &= x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_3^2x_1 + \\
&\quad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

E sua função geratriz é dada por

$$H[\mathrm{x}; t] = \sum_{j=0}^{N} \mathrm{h}_j[\mathrm{x}]\, t^j = \prod_{j=1}^{N} (1 - x_j t)^{-1} = \frac{1}{\Sigma[\mathrm{x}; -t]}. \tag{2.8}$$

iii) $\mathrm{p}_k[\mathrm{x}]$ é a *função simétrica da soma das k-ésimas potências,*

$$\mathrm{p}_k[\mathrm{x}] = \sum_{j=1}^{N} x_j^k = (x_1)^k + (x_2)^k + (x_3)^k + ... + (x_N)^k. \tag{2.9}$$

Se os $x_j's$ são os auto-valores de uma matriz $\mathbf{A}$, $\mathrm{p}_k[\mathrm{x}]$ é o traço de $\mathbf{A}^k$. Adotaremos uma convenção coerente: $\mathrm{p}_0[\mathrm{x}] = N$ e $\mathrm{p}_k[\mathrm{x}] = 0$, para $k > N$. A função geratriz dos $\mathrm{p}_k's$ é

$$P[\mathrm{x}; t] = \textstyle\sum_{j=1}^{N} \mathrm{p}_j[\mathrm{x}]\, t^{j-1} = \sum_{j=1}^{N} x_j (1 - x_j t)^{-1}. \tag{2.10}$$

Usando (2.8) temos que

$$P[\mathrm{x}; t] = \tfrac{d}{dt} \ln H[\mathrm{x}; t] = -\tfrac{d}{dt} \ln \Sigma[\mathrm{x}; -t]. \tag{2.11}$$

Existe ainda uma outra função geratriz,

$$P[\mathrm{x}; t] = \textstyle\sum_{j=1}^{N} \exp[t x_j] = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{N} (t x_j)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \mathrm{p}_n[\mathrm{x}]\, t^n. \tag{2.12}$$

Usando o formalismo dos PB é possível encontrar uma relação entre os $e_k's$ e $p_k's$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} e_n[x]t^n &= \prod_{n=1}^{N}(1+x_n t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\ln[1+tx_i]\right\} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[\sum_{i=1}^{N}\ln[1+tx_i]\right]^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(-)^{k-1}(k-1)!\sum_{i=1}^{N}x_i^k\right]^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(-)^{k-1}(k-1)!p_k[x]\right]^j \\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}B_{nj}\left[(-)^{k-1}(k-1)!p_k[x]\right]. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Temos então

$$e_n[x] = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}B_{nj}\left\{(-)^{k-1}(k-1)!p_k[x]\right\}. \qquad (2.14)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\ln\Sigma[x;t] &= \ln\left[1+\sum_{j=1}^{N}e_j[x]t^j\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^{k-1}(k-1)!}{k!}\left[\sum_{j=1}^{N}e_j[x]t^j\right]^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k-1}(k-1)!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B_{nk}[j!e_j[x]] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-)^{k-1}(k-1)!B_{nk}[j!e_j[x]]. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Usando (2.11) temos,

$$P[x;t] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-)^{k-1}(k-1)!B_{nk}\{j!e_j[x]\}. \qquad (2.16)$$

Conseqüentemente,

$$\mathrm{p}_n[\mathbf{x}] = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-)^{j-1}(j-1)!B_{nj}\{k!\mathrm{e}_k[\mathbf{x}]\} \quad \text{para} \quad k \geq 1. \tag{2.17}$$

Note que

$$\ln\Sigma[\mathbf{x};t] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-)^{k-1}(k-1)!B_{nk}[j!\mathrm{e}_j[\mathbf{x}]] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-t^n}{n!}\mathrm{p}_n[\mathbf{x}]\,; \tag{2.18}$$

daí podemos obter novamente (2.11), só que na forma

$$\ln\Sigma[\mathbf{x};t] = \int_0^t dtP[\mathbf{x};t]\,. \tag{2.19}$$

Suponhamos que o alfabeto $\mathbf{x}$ seja formado pelos auto-valores de uma matriz diagonal $\mathbf{A}$. Então, claramente $\mathrm{p}_n[\mathbf{x}] = \mathbf{trA}^n$, e $\mathrm{e}_n[\mathbf{x}] =$ a soma de todos os menores principais de $\mathbf{A}$. Observando novamente (2.4), ficam evidentes as relações entre traços, determinantes e as funções simétricas.

Uma identidade interessante é

$$\sum_{m=1}^{N}B_{Nm}\left[(-)^{j-1}(j-1)!a_j\right] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & & \cdots & . \\ a_N & a_{N-1} & & \cdots & & a_1 \end{vmatrix}, \tag{2.20}$$

que pode ser verificada a partir de (2.2). Essa identidade pode ser usada, fazendo $g_j = (-)^{j-1}(j-1)!a_j$, para reescrever muitas das equações apresentadas, na forma de determinantes. Sua forma geral seria

$$\sum_{m=1}^{N}B_{Nm}[g_j] = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -g_2 & g_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{g_3}{2!} & -g_2 & g_1 & 3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & & \cdots & . \\ (-)^{N-1}\frac{g_N}{(N-1)!} & (-)^{N}\frac{g_{N-1}}{(N-2)!} & & \cdots & & g_1 \end{vmatrix}. \tag{2.21}$$

Um caso particular envolve as funções simétricas:

$$
n!\mathrm{e}_n = \begin{vmatrix} \mathrm{p}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 & 3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & & \cdots & 0 \\ \mathrm{p}_N & \mathrm{p}_{N-1} & & \cdots & & \mathrm{p}_1 \end{vmatrix}. \tag{2.22}
$$

As relações acima entre determinantes e traços de potências podem parecer triviais, e de fato o são para matrizes normais. Elas usam apenas o espectro, ou as raízes características, e são válidas para matrizes não diagonalizáveis, que conforme já dissemos é o caso das matrizes de Bell.

Um polinômio $F[x_1, x_2, x_3, ..., x_N]$ que se transforma em $-F[x_1, x_2, x_3, ..., x_N]$ por uma permutação ímpar dos $x_k's$ é uma *função alternante* do alfabeto $\mathrm{x} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$. O mais simples desses polinômios é dado pelo produto das diferenças

$$
p(x_1, x_2, x_3, ..., x_N) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} (x_j - x_i), \tag{2.23}
$$

que é nulo quando duas de suas letras são iguais. Seu quadrado, $D(\mathrm{x}) = [p(\mathrm{x})]^2$, é uma função simétrica, e conseqüentemente pode ser escrita em termos dos $\mathrm{e}_j's$. $p(\mathrm{x})$ é conhecido como *determinante de Vandermonde*[8, 10], e é igual a

$$
p(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_N^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix}. \tag{2.24}
$$

Note que $\mathrm{p} = \Xi\,\mathrm{x}$ é

$$
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_N^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots & x_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_N . \end{pmatrix} \tag{2.25}
$$

A inversão da matriz Ξ só é possível se todas as raízes forem distintas, visto que seu determinante é do tipo de Vandermonde. Encontrar os $x_i's$ em termos dos $p_j's$ corresponde a encontrar a inversa da matriz Ξ. Este é um problema que virá à tona quando escrevermos os projetores de uma matriz. Apresentaremos aqui apenas o resultado:

$$
x_i = \sum_{k=1}^{N} \left[\Xi^{-1}\right]_{ik} p_k [\mathrm{x}] = \sum_{j=1}^{N} \left[\Xi^{-1}\right]_{ij} \frac{(-)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{l=1}^{j} (-)^{l-1} (l-1)! B_{jl} \{k! \mathrm{e}_k [\mathrm{x}]\} . \tag{2.26}
$$

com

$$
\left[\Xi^{-1}\right]_{ik} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} x_i^{j-k+1} (-)^{N-j} \mathrm{e}_{N-j} [\mathrm{x}]}{\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} (-)^{N-j} \mathrm{e}_{N-j} [\mathrm{x}]} . \tag{2.27}
$$

2.3 Polinômios

Nesta seção transcreveremos as relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio, usando as funções simétricas. De (2.6) é fácil ver que as raízes de $\Sigma[\mathrm{x}; t]$ são $r_j = -1/x_j$, o que sugere a conveniência de definirmos, simultâneamente ao alfabeto x, seu alfabeto "recíproco", $\mathrm{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\}$, com cada um dos $x_j^* = -1/x_j$. Assim, o alfabeto raíz de $\Sigma[\mathrm{x}; t]$ é $\mathbf{r} = \mathrm{x}^*$. Observemos que tomar o recíproco é uma involução , $\mathrm{x}^{**} = \mathrm{x}$. As funções simétricas elementares desses alfabetos estão relacionadas da seguinte forma

$$
(-)^j \mathrm{e}_{N-j} [\mathrm{x}] = \mathrm{e}_N [\mathrm{x}] \mathrm{e}_j [\mathrm{x}^*] . \tag{2.28}
$$

Uma conseqüencia imediata é que

$$\Sigma[\mathrm{x};t] = \mathrm{e}_N[\mathrm{x}]\, t^N \Sigma\left[\mathrm{x}^*; t^{-1}\right]. \tag{2.29}$$

Se $\mathbf{x}$ é o alfabeto auto-valor de uma matriz invertível $\mathbf{A}$, esta expressão generaliza a identidade $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$, que é o caso $j = N$. Novamente de (2.6), usando a definição $r_j = -1/x_j$, temos

$$\Sigma[\mathrm{x};t] = \frac{1}{\mathrm{e}_N[\mathrm{x}]} \prod_{j=1}^{N} (r_j - t). \tag{2.30}$$

Uma equação interessante para as nossas aplicações futuras envolve a produtória da equação acima na ausência de uma das letras do alfabeto, e tem como resultado

$$\prod_{j=1; j\neq i}^{N} (r_j - t) = \mathrm{e}_{Ni}[\mathbf{r}] \sum_{j=0}^{N} \mathrm{e}_{ji}[\mathbf{r}^*]\, t^j, \tag{2.31}$$

com $\mathrm{e}_{ki}[\mathbf{r}]$ igual a soma de todos os k-ésimos produtos do alfabeto $\mathbf{r}$, excluindo a letra r_i, e por conveção $\mathrm{e}_{0i} = 0$.

$$\mathrm{e}_{ki}[\mathbf{r}] = \sum_{p=0}^{k} (-)^p r_i^p \mathrm{e}_{k-p}[\mathbf{r}] = \sum_{j=0}^{k} (-r_i)^{k-j} \mathrm{e}_j[\mathbf{r}]. \tag{2.32}$$

Um polinômio geral do tipo

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 \tag{2.33}$$

pode ser escrito nas formas eqüivalentes

$$\begin{aligned} P(z) &= a_N \prod_{j=1}^{N} (z - r_j) = (-)^N a_N \mathrm{e}_N[\mathbf{r}]\, \Sigma[\mathbf{r}^*; z] \\ &= (-)^N a_N \mathrm{e}_N[\mathbf{r}] \sum_{j=0}^{N} \mathrm{e}_j[\mathbf{r}^*]\, z^j = a_N \sum_{j=0}^{N} (-)^{N-j} \mathrm{e}_{N-j}[\mathbf{r}]\, z^j \\ &= (-)^N a_N \mathrm{e}_N[\mathbf{r}] \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{r_j}\right) = a_0 \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{r_j}\right) \\ &= P(0) \textstyle\prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{r_j}\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

A última equação é conhecida como *expressão de Weierstrass* [11] para um polinômio em termos de seus zeros. Usando as expressões acima, temos

$$a_j = (-)^{N-j} a_N \mathrm{e}_{N-j}[\mathbf{r}]\,; a_0 = P(0) = (-)^N a_N \mathrm{e}_N[\mathbf{r}]\,. \tag{2.35}$$

Usando (2.14) podemos escrever a *fórmula de Viète*, que relaciona os coeficientes de um polinômio $P(z)$ com as potências de suas raízes

$$a_j = a_N \frac{(-)^{N-j}}{(N-j)!} \sum_{r=0}^{N-j} B_{N-j,r}\left\{(-)^{k-1}(k-1)!\mathrm{p}_k[\mathbf{r}]\right\}. \tag{2.36}$$

O discriminante de uma equação polinomial é o mais simples polinômio alternante nas suas raízes. Usualmente é tomado como $(-)^N p(\mathbf{r}) = \det\left[(r_i)^{N-j}\right] = \prod_{1\le i\le j\le N}(r_i - r_j)$, ou seja, é um determinante de Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1^{N-1} & r_1^{N-2} & r_1^{N-3} & \cdots & r_1^0 \\ r_2^{N-1} & r_2^{N-2} & r_2^{N-3} & \cdots & r_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_N^{N-1} & r_N^{N-2} & r_N^{N-3} & \cdots & r_N^0 \end{vmatrix} = (-)^N \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_N \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \cdots & r_N^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 & \cdots & r_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{N-1} & r_2^{N-1} & r_3^{N-1} & \cdots & r_N^{N-1} \end{vmatrix}. \tag{2.37}$$

2.4 Polinômios característicos

Dada qualquer matriz $\mathbf{A}$, a matriz $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$, tal que λ é uma variável complexa, é a sua *matriz característica*, ou resolvente. Seu determinante é um polinômio em λ, o polinômio característico de $\mathbf{A}$ [10]

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \sum_{j=0}^{N} a_j \lambda^{N-j}. \tag{2.38}$$

Note-se que, de acordo com (2.2), $\Delta(\lambda) = \Delta_A(\lambda; -1)$. Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ são os auto-valores de $\mathbf{A}$, então

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\cdots(\lambda - \lambda_N) = \sum_{j=0}^{N} (-)^j \lambda^{N-j} \mathrm{e}_j[\boldsymbol{\lambda}] \tag{2.39}$$

com $\boldsymbol{\lambda}$ igual ao alfabeto $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$. A equação secular

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{2.40}$$

nos diz que os auto-valores são raízes do polinômio característico. As raízes constituem o espectro de $\mathbf{A}$, $Sp\mathbf{A} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$, que é o conjunto de todos os valores complexos de λ para o qual o operador $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ não é invertível.

Vamos agora escrever as relações entre o polinômio característico de uma matriz $\mathbf{A}$, NxN, e os diferentes tipos de funções simétricas escritas em termos do alfabeto auto-valor de $\mathbf{A}$. Dado um alfabeto auto-valor $\boldsymbol{\lambda} = Sp\mathbf{A} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$, e seu recíproco $\boldsymbol{\lambda}^* = \left\{-\lambda_1^{-1}, -\lambda_2^{-1}, ..., -\lambda_N^{-1}\right\}$, temos que

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^k\right) = \mathrm{p}_k[\boldsymbol{\lambda}] = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j^k; \tag{2.41}$$

$$\mathrm{p}_k[\boldsymbol{\lambda}^*] = \sum_{j=0}^{N} (-)^k \lambda_j^{-k}; \tag{2.42}$$

$$\det \mathbf{A} = \mathrm{e}_N[\boldsymbol{\lambda}]. \tag{2.43}$$

O polinômio característico pode ser escrito nas seguintes formas eqüivalentes, fazendo $z = -1$ em (2.1):

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \lambda_j) && (2.44)\\
&= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{(-)^{k-1}(k-1)!\mathrm{tr}\mathbf{A}^k\right\} && (2.45)\\
&= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{(-)^{k-1}(k-1)!\mathrm{p}_k[\boldsymbol{\lambda}]\right\} && (2.46)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} (-)^j \, \mathrm{e}_j [\boldsymbol{\lambda}] . \qquad (2.47)$$

Quando existir a inversa de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \det\left[\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\right] &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathtt{tr} \left[\left(-\mathbf{A}^{-1} \right)^k \right] \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{p}_k [\boldsymbol{\lambda}^*] \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} (-)^j \, \mathrm{e}_j [\boldsymbol{\lambda}^*] . \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Determinantes e traços de uma matriz são invariantes sob transformações de similaridade, ou seja, $\mathbf{A}' = g^{-1}\mathbf{A}g$. Como $\mathtt{tr}\,(g^{-1}\mathbf{A}g) = \mathtt{tr}\,(g^{-1}g\mathbf{A}) = \mathtt{tr}\,(\mathbf{A})$, o traço de qualquer potência de $\mathbf{A}$ será também um invariante, com $\mathtt{tr}\,(\mathbf{A}')^k = \mathtt{tr}\,(g^{-1}\mathbf{A}gg^{-1}\mathbf{A}g...g^{-1}\mathbf{A}g) = \mathtt{tr}\left(g^{-1}\mathbf{A}^k g\right) = \mathtt{tr}\,(\mathbf{A})^k$. Quando $\mathbf{A}$ pertencer a um grupo de Lie, e o grupo atuar sobre a sua própria álgebra por similaridades, a adaptação é imediata. Resumindo, nós estamos lidando com polinômios que são invariantes sob similaridade e mais adiante estudaremos esta invariância sob a ação de um grupo. O polinômio característico, dado por (2.47) é um invariante e pode ser escrito na forma canônica

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^{N-j} \varphi_j (\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{N} \lambda^j \varphi_{N-j} (\mathbf{A}) , \qquad (2.49)$$

tal que cada coeficiente $\varphi_j(\mathbf{A})$ é um invariante, pois que é escrito em termos dos traços de potências de $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned} \varphi_j (\mathbf{A}) &= \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathtt{tr} \left(\mathbf{A}^k \right) \right\} \qquad (2.50) \\ &= \frac{(-)^j}{j!} \sum_{m=1}^{j} B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{p}_k [\boldsymbol{\lambda}] \right\} \qquad (2.51) \\ &= (-)^j \, \mathrm{e}_j [\boldsymbol{\lambda}] . \qquad (2.52) \end{aligned}$$

Os invariantes *básicos* de uma matriz **A** são os coeficientes de seu polinômio característico. Em última instância, eles são funções simétricas no alfabeto auto-valor de **A**. Nós os chamamos "básicos" porque, obviamente, funções de objetos invariantes são também invariantes. Então, nós poderíamos obter uma infinidade de invariantes partindo desse conjunto. O determinante de uma matriz não a determina completamente, mas o conjunto completo de invariantes sim, pois eles fixam seu espectro e a determinam a menos de transformações de similaridade, $\mathbf{A}' = g\mathbf{A}g^{-1}$. Ao contrário, um conjunto de matrizes relacionadas por similaridade possuem os mesmos invariantes e o mesmo polinômio característico.

Uma expressão que nos será útil envolve a derivada do polinômio característico

$$\Delta'(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} (N-j)\, \lambda^{N-j-1} \varphi_j(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{N} k\lambda^{k-1} \varphi_{N-k}(\mathbf{A}), \tag{2.53}$$

Em particular, obtemos para $\lambda = \lambda_j$

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda_j) &= (\lambda_j - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2) \ldots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \ldots \\ &\quad \times \cdots (\lambda_j - \lambda_{N-1})(\lambda_j - \lambda_N). \end{aligned} \tag{2.54}$$

De acordo com o Teorema de Cayley-Hamilton[8, 9, 10], uma matriz satisfaz sua própria equação característica. De (2.47) temos

$$\Delta(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^{N} (-)^j \, \mathbf{A}^{N-j} e_j[\boldsymbol{\lambda}] = 0. \tag{2.55}$$

Esta equação será de suma importância quando no próximo capítulo introduzirmos as funções de matrizes e suas aplicações .

Capítulo 3

Invariantes de uma Álgebra de Lie

Neste capítulo faremos algumas aplicações do formalismo que envolve as funções simétricas e a equação característica, em termos dos polinômios de Bell, a tópicos de reconhecido interesse em física, em particular em teoria de campos. Mostraremos as expressões gerais para os invariantes dos grupos $SU(3)$ e de Lorentz, e para as transformações do grupo Lorentz. Os invariantes encontrados são não degenerados e são diferentes de zero. Para as transformações de Poincaré e para o grupo de Galileu (este último apresenta degenerescência de auto-valores nulos) foram também encontradas formas gerais[13], sendo necessário desenvolver um formalismo mais geral, que não apresentaremos nesta tese.

3.1 Funções de Matrizes

Suponha que uma função $F(\lambda)$ possa ser expandida em uma série de potências, $F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\lambda - \lambda_0)^k$, no círculo de convergência $|\lambda - \lambda_0| < r$. Uma função $F(\mathbf{A})$, cujo argumento é a matriz $\mathbf{A}$, é bem definida como a matriz $F(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\mathbf{A} - \lambda_0)^k$ se todos os auto-valores de $\mathbf{A}$ estiverem no círculo de convergência. Dada uma matriz $\mathbf{A}$, NxN, de auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, o conjunto de projetores $\{\mathbf{Z}_j[\mathbf{A}] = |\lambda_j\rangle\langle\lambda_j|\}$ constitui uma base na qual $\mathbf{A}$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{Z}_j [\mathbf{A}] . \tag{3.1}$$

Podemos então definir, de forma eqüivalente, a função $F(\mathbf{A})$ como a matriz

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{N} F(\lambda_j) \mathbf{Z}_j [\mathbf{A}] . \tag{3.2}$$

A exponencial é sempre uma função bem definida, já que o raio de convergência é infinito, de forma que

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{N} \exp(\lambda_j) \mathbf{Z}_j [\mathbf{A}] . \tag{3.3}$$

Temos ainda,

$$\mathbf{A}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j)^{\alpha} \mathbf{Z}_j [\mathbf{A}] . \tag{3.4}$$

A base $\{\mathbf{Z}_j [\mathbf{A}]\}$ depende da matriz $\mathbf{A}$; entretanto, independe da função F. Os $\mathbf{Z}_j's$ apresentam algumas propriedades interessantes: i) como projetores, são idempotentes, ou seja, $\mathbf{Z}_j^2 = \mathbf{Z}_j$; ii) podem ser normalizados pelo traço, $\mathrm{tr}(\mathbf{Z}_j) = 1$, para cada j e iii) conseqüentemente, são ortonormais pelo traço, $\mathrm{tr}(\mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_k) = \delta_{jk}$. Alguns resultados são imediatos, usando estas propriedades nas equações acima: $\mathrm{tr} F[(\mathbf{A})] = \sum_{j=1}^{N} F(\lambda_j)$ e $\mathrm{tr}\left[A^k \mathbf{Z}_j\right] = (\lambda_j)^k$. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz normal, diagonalizada pela matriz $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}_{diagonal}$, então os elementos de $\mathbf{Z}_k$ são $[\mathbf{Z}_k]_{rs} = U_{rk}^{-1} U_{ks}$, sem soma nos índices.

Para matrizes finitas NxN, um número limitado de potências é suficiente para definir uma base, as matrizes $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{N-1}$. Ou ainda, podemos usar o conjunto $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^N$. Fazendo sucessivamente $F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{N-1}$, $\mathbf{A}^N$, obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{Z}_j \,;\; \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{Z}_j \,;\; \mathbf{A}^2 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2 \mathbf{Z}_j \,;\; ... \\ ...\, \mathbf{A}^k &= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^k \mathbf{Z}_j \,;\; \mathbf{A}^{N-1} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{N-1} \mathbf{Z}_j \,;\; \mathbf{A}^N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^N \mathbf{Z}_j \,; \end{aligned} \tag{3.5}$$

Para $k \geq N$ os $\mathbf{A}^k$ não são mais independentes, e podem ser escritos em função das potências de $\mathbf{A}$ menores que N. Este fato decorre do teorema de Cayley-Hamilton. De (2.55), usando a convenção $e_0 = 1$, é imediato escrevermos $\mathbf{A}^N = \sum_{j=1}^{N} (-)^{j-1} A^{N-j} e_j [\boldsymbol{\lambda}]$, deixando explícita a nossa afirmação inicial.

Das relações descritas por (3.5), N são suficientes para passarmos de uma base $\{\mathbf{Z}_j\}$ para uma base em potências de $\mathbf{A}$, que podem ser escolhidas entre as N primeiras ou últimas, conforme a conveniência. No primeiro caso, podemos escrever formalmente que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \lambda_3^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_N . \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Nosso objetivo é inverter essa equação e escrevê-la usando "formas fechadas". O resultado obtido do uso da regra de Crammer é

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j [\mathbf{A}] &= \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1)(\mathbf{A} - \lambda_2) \ldots (\mathbf{A} - \lambda_{j-1})(\mathbf{A} - \lambda_{j+1}) \ldots}{(\lambda_j - \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2) \ldots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \ldots} \\ &\quad \times \cdots \frac{(\mathbf{A} - \lambda_{N-1})(\mathbf{A} - \lambda_N)}{(\lambda_j - \lambda_{N-1})(\lambda_j - \lambda_N)} \qquad (3.7) \\ &= \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)} \prod_{k \neq j}^{N} (\mathbf{A} - \lambda_k) . \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Note que, a matriz usada na equação (3.6) é a mesma que usamos em (2.25), cujos elementos são $[\Xi]_{ij} = (\lambda_j)^{i-1}$, e cuja inversa é dada por (2.27). Portanto, para a base $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^{N-1}$, podemos escrever

$$\mathbf{Z}_i [\mathbf{A}] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Xi^{-1}\right]_{ik} \mathbf{A}^k. \tag{3.9}$$

Este é, obviamente, um polinômio em $\mathbf{A}$, cujos coeficientes dependem de seus auto-valores, que não devem ser degenerados. Observe que o polinômio

$\mathbf{Z}_k$ tem os zeros coincidentes com os do polinômio característico de $\mathbf{A}$, para auto-valores diferentes de λ_k. Conseqüentemente, a função $F(A)$, dada por (3.2), é

$$F(\mathbf{A}) = \sum_j \left\{ \prod_{k \neq j} \frac{\mathbf{A} - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right\} F(\lambda_j). \tag{3.10}$$

Os coeficientes desta equação são claramente polinômios invariantes que podem ser reescritos em termos dos traços e potências de $\mathbf{A}$. Usando (2.27), (2.28) e (2.52), temos

$$\mathbf{Z}_i[\mathbf{A}] = \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} (\lambda_i)^{j-k} \varphi_{N-j}[\mathbf{A}] \mathbf{A}^k}{\sum_{l=0}^{N} \sum_{j=0}^{l} (\lambda_i)^{j} \varphi_{N-j}[\mathbf{A}]}. \tag{3.11}$$

Quando escrita na representação adjunta, para a equação acima, com matrizes $\mathbf{A}$ de dimensão N, um de seus auto-valores é nulo. Portanto, $\varphi_N[\mathbf{A}] = (-)^N \det \mathbf{A} = 0$, e podemos reescrevê-la como

$$\mathbf{Z}_i[\mathbf{A}] = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k} (\lambda_i)^{j-k} \varphi_{N-j}[\mathbf{A}] \mathbf{A}^k}{\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{l} (\lambda_i)^{j} \varphi_{N-j}[\mathbf{A}]}. \tag{3.12}$$

Estas expressões são obtidas usando as definições e propriedades das funções simétricas apresentadas no Capítulo 2, em especial (2.31), (2.49) a (2.52). Olhando para (3.12) pode-se ter alguma dúvida sobre seu comportamento quando uma das raízes for nula. O bom procedimento para o obtermos os projetores é calcularmos analiticamente sua expressão, usando símbolos λ_k, e multiplicarmos o mumerador e denominador por $\det \mathbf{A} = \prod_j \lambda_j$. Este procedimento contorna quaisquer problemas que teríamos com auto-valores nulos. O uso dessas expressões para os projetores mostrou-se muito vantajoso quando aumentamos a ordem das matrizes, enquanto as conferíamos usando o software Mathematica^{TM}.

Assim, para obtermos uma função de $\mathbf{A}$, como por exemplo em (3.3), é necessário encontrarmos i) os auto-valores de $\mathbf{A}$ e ii) as $N-1$ primeiras potências de A. O que fizemos até aqui foi partir de uma base $\left\{\mathbf{A}^k\right\}$ para as funções de $\mathbf{A}$ e chegar a uma base de projetores $\mathbf{Z}_j[\mathbf{A}]$.

Para as aplicações que faremos no capítulo 4 é interessante escrevermos os projetores na base $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ..., \mathbf{B}^N$. Isso pode ser feito substituindo em (3.7)

$\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ e multiplicando-a por $\mathbf{B}/\lambda_i$. Tal qual em (3.9), a base das potências de B e os projetores $\mathbf{Z}_j$ transformam-se como

$$\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right] = \sum_{k=1}^{N} \left[\mathbf{\Lambda}^{-1}\right]_{ik} \mathbf{B}^k; \tag{3.13}$$

com $[\mathbf{\Lambda}]_{ij} = (\lambda_i)^j$, e λ_j os auto-valores de $\mathbf{B}$ e

$$\left[\mathbf{\Lambda}^{-1}\right]_{ik} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_i)^{j-k} (-)^j \, \mathrm{e}_{N-j}[\boldsymbol{\lambda}]}{\sum_{j=0}^{N-1} (N-j) (\lambda_i)^j (-)^j \, \mathrm{e}_{N-j}[\boldsymbol{\lambda}]}. \tag{3.14}$$

Encontrar expressões analíticas mais simples para a matriz $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ nos parece ser um trabalho bastante complicado. Ele implicaria em conhecer formas analíticas fechadas para a soma $\sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_i)^j \, \mathrm{e}_j[\boldsymbol{\lambda}^*]$. Para isso, seria necessário conhecermos uma expressão fechada para $\mathrm{e}_j[\boldsymbol{\lambda}^*]$, e mesmo para uma aplicação como a que faremos co capítulo 4, em que as letras do alfabeto são potências de uma letra a fixa, resolvê-lo seria equivalente a resolver um problema que ainda persiste em análise combinatória.

As matrizes de Bell não são normais, ou seja, não comutam com sua adjunta. A conseqüencia imediata é que elas não podem ser diagonalizadas. Felizmente, isso não será um problema para nós porque, como são matrizes triangulares, seus auto-valores são conhecidos[12]. Assim, as funções das matrizes de Bell ficam completamente determinadas pelo seu espectro.

3.2 Aplicações às Álgebras de Lie

Consideremos $\mathbf{A} = \omega^a \mathbf{J}_a$ um membro artitrário de uma álgebra de Lie, com geradores $\mathbf{J}_a$, $a = 1, 2, 3, ..., N$. Um elemento do grupo terá a forma $g = \exp(\omega^a \mathbf{J}_a)$, tal que ω^a, as componentes de $\mathbf{A}$ na base vetorial $\{\mathbf{J}_a\}$, são os parâmetros da transformação. A ação do grupo em $\mathbf{A}$ é através da representação adjunta, ou seja, através de transformações de similaridade: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = g^{-1}\mathbf{A}g$. Como o polinômio característico é invariante sob tais transformações , ele é o exemplo básico de invariante numa álgebra de Lie. Assim, $\Delta(\lambda)$ é um polinômio na variável λ cujos coeficientes são funções $\varphi_j(\omega) = \varphi_j(\mathbf{A})$ dos parâmetros, que por sua vez são polinômios nos traços de potências de $\mathbf{A}$. O rank de uma álgebra de Lie é o número de coeficientes

$\varphi_j(\omega)$ funcionalmente independentes. Os invariantes aos quais nos referimos, $\varphi_j(\boldsymbol{\lambda})$, são nada mais que as funções simétricas, tal qual escrevemos em (2.52), do alfabeto auto-valor $\boldsymbol{\lambda} = Sp\mathbf{A} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$ de um membro genérico $\mathbf{A}$ de uma álgebra de Lie. Alguns exemplos desses polinômios invariantes são

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(\omega) &= 1; \\
\varphi_1(\omega) &= -\mathbf{trA}; \\
\varphi_2(\omega) &= \frac{1}{2}\left[-\mathbf{trA}^2 + (\mathbf{trA})^2\right]; \\
\varphi_3(\omega) &= \frac{1}{3}\mathbf{trA}^3 + \frac{1}{2}(\mathbf{trA})\left(\mathbf{trA}^2\right) - \frac{1}{6}(\mathbf{trA})^3; \\
\varphi_4(\omega) &= -\frac{1}{4}\mathbf{trA}^4 + \frac{1}{3}(\mathbf{trA})\left(\mathbf{trA}^3\right) + \frac{1}{8}\left(\mathbf{trA}^2\right)^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{trA})^2\left(\mathbf{trA}^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{24}(\mathbf{trA})^4; \\
&\dots \\
\varphi_N(\omega) &= (-)^N \det \mathbf{A}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

As relações acima nos levam a introduzir objetos multilineares, que são tensores invariantes, dos quais apresentaremos alguns exemplos:

$$\eta^{(0)} = 1; \tag{3.16}$$

$$\eta^{(1)}_a = -\mathbf{trJ}_a; \tag{3.17}$$

$$\eta^{(2)}_{ab} = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{tr}(\mathbf{J}_a\mathbf{J}_b) - \mathbf{tr}(\mathbf{J}_a)\,\mathbf{tr}(\mathbf{J}_b)\right] \tag{3.18}$$

$$\eta^{(3)}_{abc} = -\frac{1}{3}\left[\mathbf{tr}(\mathbf{J}_a\mathbf{J}_b\mathbf{J}_c) - \frac{3}{2}(\mathbf{trJ}_a)(\mathbf{trJ}_b\mathbf{J}_c) + \frac{1}{2}(\mathbf{trJ}_a)(\mathbf{trJ}_b)(\mathbf{trJ}_c)\right]; \tag{3.19}$$

$$\dots$$

$$\eta^{(n)}_{a_1a_2...a_n} = \frac{(-)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n} B_{nm}\left\{(-)^k (k-1)!\,\mathbf{tr}\left(\mathbf{J}_{a_1}\mathbf{J}_{a_2}...\mathbf{J}_{a_k}\right)\right\}. \tag{3.20}$$

Estes tensores fornecem objetos invariantes por contração :

$$X = X^{a_1a_2...a_n}\eta^{(n)}_{a_1a_2...a_n}$$

$$= \frac{(-)^n}{n!} X^{a_1 a_2 \ldots a_n} \sum_{m=0}^{n} B_{nm} \left\{ (-)^k (k-1)! \mathrm{tr} \left(\mathbf{J}_{a_1} \mathbf{J}_{a_2} \ldots \mathbf{J}_{a_k} \right) \right\}, \quad (3.21)$$

e os operadores invariantes de Casimir,

$$C^{(n)} = \eta^{(n)}_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{J}^{a_1} \mathbf{J}^{a_2} \ldots \mathbf{J}^{a_n}. \quad (3.22)$$

O mais conhecido destes tensores é a forma bilinear de Killing γ_{ab}. Ela é usualmente definida, para o caso em que $\mathrm{tr}\mathbf{J}_a = 0$ para todos os geradores, como $\gamma_{ab} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{J}_a \mathbf{J}_b\right)$. Para grupos semi-simples, γ_{ab} é uma métrica, conhecida como métrica de Killing-Cartan. Para grupos compactos esta forma terá o sinal definido, para os grupos não compactos sinal não definido e será degenerada para os grupos que não forem semi-simples.

Grupos ortogonais e pseudo-ortogonais são usualmente introduzidos como os grupos das transformações reais que preservam uma forma bilinear, real e não singular η. Se g é um elemento desse grupo, isso significa que $g^T \eta g = \eta$, com g^T a matriz transposta de g. Se $g = \exp \mathbf{A}$, tal que $\mathbf{A}$ seja um membro da álgebra de Lie, isto implica que $\mathbf{A}^T = -\eta \mathbf{A} \eta^{-1}$ e que serão nulos os traços de potências ímpares de $\mathbf{A}$. Este fato pode ser verificado conforme explicaremos a seguir. Tenhamos em mente a expressão para o polinômio característico $\Delta(\boldsymbol{\lambda})$, dado por (2.45). O determinante da matriz $\mathbf{A}$, e de sua transposta, $\mathbf{A}^T$, são iguais, $\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det\left[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^T\right]$. Como $\mathbf{A}^T = -\eta \mathbf{A} \eta^{-1}$ aparecerá uma fator $(-)^k$ no argumento do PB que aparece em (2.45):

$$B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{tr} \left(\mathbf{A}^T \right)^k \right\} = B_{jm} \left\{ (-)^k (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{tr} \left(\mathbf{A}^k \right) \right\}$$

$$= B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{tr} \left(\mathbf{A}^k \right) \right\}$$

Conseqüentemente,

$$\det[\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}] = \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda^{N-j}}{j!} \sum_{m=0}^{j} B_{jm} \left\{ (-)^{k-1} (k-1)! \mathrm{tr} \left(\mathbf{A}^k \right) \right\}. \quad (3.23)$$

A comparação dessa expressão com (2.45) mostra que os coeficientes devem ser nulos para valores ímpares de j: $\varphi_{2j+1}(\boldsymbol{\omega}) = 0$. Assim, os invariantes dados por (3.15), reduzem-se às formas simples

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\omega) &= 1;\ \varphi_1(\omega)=0;\ \varphi_2(\omega)=-\frac{1}{2}\mathtt{tr}\mathbf{A}^2;\\
\varphi_3(\omega) &= 0;\ \varphi_4(\omega)=-\frac{1}{4}\mathtt{tr}\mathbf{A}^4+\frac{1}{8}\left(\mathtt{tr}\mathbf{A}^2\right)^2;\ldots
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Para grupos unitários, escritos em termos dos operadores hermitianos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^*$, a única conclusão é que os invariantes são reais, $\varphi_j^*(\omega) = \varphi_j(\omega)$. A condição extra para os grupos especiais unitários, $\det[g = \exp i\mathbf{A}] = 1$, leva a $\mathtt{tr}\mathbf{A} = 0$.

3.3 $SU(3)$

O $SU(3)$ é o grupo das matrizes especiais unitárias 3x3, de rank 2, ou seja, possui dois invariantes independentes, um bilinear e o outro trilinear. Nós usaremos este grupo para ilustrar alguns dos resultados mostrados até aqui. Em termos dos parâmetros $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k,\ k = 1.2....,8\}$, e usando a base de Gell-Mann[14], $\{\mathbf{T}_k\}$, para a álgebra, o elemento do grupo escreve-se como

$$g[\boldsymbol{\alpha}] = \exp\left[\frac{i}{2}\alpha_k T_k\right]. \tag{3.25}$$

O elemento geral da álgebra será

$$\mathbf{W} = \alpha_k \mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \alpha_3+\alpha_8/\sqrt{3} & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3+\sqrt{3}\alpha_8 & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_4+i\alpha_5 & \alpha_6+i\alpha_7 & -2\alpha_8/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Como $\mathtt{tr}\mathbf{W} = 0$, o polinômio característico $\Delta(\lambda) = \lambda^3\varphi_0 + \lambda^2\varphi_1 + \lambda^1\varphi_2 + \varphi_3$, deve ter $\varphi_0 = 1$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = -\frac{1}{2}\mathtt{tr}\mathbf{W}^2$; e $\varphi_3 = -\det\mathbf{W} = -\frac{1}{3}\mathtt{tr}\mathbf{W}^3$. Assim, de acordo com (3.24), teremos

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^1\varphi_2 + \varphi_3 = \lambda^3 - \frac{\lambda}{2}\mathtt{tr}\mathbf{W}^2 - \det\mathbf{W}, \tag{3.27}$$

A matriz $\mathbf{W}$ deve satisfazer sua equação secular, ou seja, $\mathbf{W}^3 - \frac{\mathbf{W}}{2}\mathtt{tr}\mathbf{W}^2 - \mathbf{I}\det\mathbf{W} = 0$, cujo traço dá, $\mathtt{tr}\mathbf{W}^3 = 3\det\mathbf{W}$, que é um caso particular de

(2.3). Nós podemos, obviamente, obter $\mathbf{W}^3$ diretamente de (3.26) e verificar os resultados obtidos. O primeiro invariante está relacionado à métrica de Cartan na variedade 8-dimensional do $SU(3)$,

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{trW}^2 = -\sum_{i=1} 8\alpha_i^2 = -\gamma_{ij}\alpha_i\alpha_j, \tag{3.28}$$

com $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ escolhido como positivo e a notação de soma de Einstein adotada na expressão acima. O outro invariante está relacionado à forma trilinear η_{ijk}, e é definido como

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= -\frac{1}{3}\mathbf{trW}^3 = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{8} \alpha_i\alpha_j\alpha_k \mathbf{tr}(\mathbf{T}_i\mathbf{T}_j\mathbf{T}_k) \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^{8} \eta_{ijk}\alpha_i\alpha_j\alpha_k, \end{aligned} \tag{3.29}$$

tal que as componentes η_{ijk} podem ser calculadas a partir da expressão explícita de $\det \mathbf{W}$

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}\alpha_i\alpha_j\alpha_k &= 2(\alpha_1\alpha_4\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5\alpha_6 - \alpha_2\alpha_4\alpha_7 + \alpha_1\alpha_5\alpha_7) + \alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_3\alpha_5^2 \\ &= -\alpha_3\alpha_6^2 - \alpha_3\alpha_7^2 + \left(1/\sqrt{3}\right)\left[2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right) - \alpha_4^2 - \alpha_5^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_6^2 - 2/3\alpha_8^2\right]\alpha_8. \end{aligned} \tag{3.30}$$

3.4 As Transformações de Lorentz

Os geradores de Lorentz podem ser tomados como matrizes 4x4, $\mathbf{J}_{\alpha\beta}$, cujos elementos são $(\mathbf{J}_{\alpha\beta})_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\beta\gamma}\eta_{\alpha\delta}$, com α, β, γ, δ,$=0,1,2,3$ e $\eta = diag(1,-1,-1,-1)$ a métrica responsável por abaixar e levantar os índices. Elas satisfazem as seguintes regras de comutação :

$$\left[\mathbf{J}^{\alpha\beta}, \mathbf{J}^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}\mathbf{J}^{\alpha\delta} + \eta^{\alpha\delta}\mathbf{J}^{\beta\gamma} - \eta^{\beta\delta}\mathbf{J}^{\alpha\gamma} - \eta^{\alpha\gamma}\mathbf{J}^{\beta\delta}. \tag{3.31}$$

Um elemento geral da álgebra será

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathbf{J}^{\alpha\beta}. \qquad (3.32)$$

com a soma nos índices. Os parâmetros $\omega_{\alpha\beta}$ são os ângulos do grupo de rotação $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3,)$, $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega^k$ e com ($\boldsymbol{\beta} = \mathrm{v}/c$ e $\boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\beta}|$ os ângulos imaginários $\omega_{0j} = \zeta_j$, os boost's, representados pelo vetor $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \tanh^{-1}[\boldsymbol{\beta}] = \mathrm{v}/|\mathrm{v}|\, tanh^{-1}[|\mathrm{v}/c|]$. Logo, um membro da álgebra é dado por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta^1 & -\zeta^2 & -\zeta^3 \\ -\zeta^1 & 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ -\zeta^2 & \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\zeta^3 & -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.33)$$

Estamos usando a notação $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ e $\zeta = |\boldsymbol{\zeta}|$. Note que usamos os índices de linhas e colunas da matriz indo de 0 a 3. Seu polinômio característico é dado por

$$\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^4 + \left[\omega^2 - \zeta^2\right]\lambda^2 - [\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}]^2, \qquad (3.34)$$

cujos coeficientes mostram que os dois invariantes básicos são $\varphi_2 = [\omega^2 - \zeta^2]$ e $\varphi_4 = [\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}]^2 = \det\mathbf{A}$. Por razões de praticidade usaremos

$$f_1 = \omega^2 - \zeta^2; \;\; f_2 = \boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}. \qquad (3.35)$$

Usando o teorema de Cayley-Hamilton, as potências de $\mathbf{A}$ iguais ou superiores a $\mathbf{A}^4$ são escritas em termos de $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2$ e $\mathbf{A}^3$. Em particular, $\mathbf{A}^4 = -[\omega^2 - \zeta^2]\,\mathbf{A}^2 + [\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}]^2$. Como $\mathtt{tr}\mathbf{A} = \mathtt{tr}\mathbf{A}^3 = 0$, de (2.45) temos que $\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{2!}\mathtt{tr}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{4!}\left\{3\left(\mathtt{tr}\mathbf{A}^2\right)^2 - 3!\mathtt{tr}\mathbf{A}^4\right\}$ e de (2.3) que o último coeficiente, entre chaves, é igual a $\det\mathbf{A}$. Para escrever o elemento geral do grupo é conveniente definirmos as duas expressões invariantes,

$$U = \left[-f_1/2 + \left(f_1^2/4 + f_2^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (3.36)$$

e

$$V = \left[-f_1/2 - \left(f_1^2/4 + f_2^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \qquad (3.37)$$

Para alguns valores de U e V, reais ou imaginários, eles serão as transformações finitas que já conhecemos. Os valores $V = 0$ e $U = \zeta$ representam um boost puro; $U = 0$ e $V = i\omega$, uma rotação pura. As quatro raízes da equação secular encontradas são $\lambda_{1,2} = \pm U$ e $\lambda_{3,4} = \pm V$. As transformações finitas serão dadas por

$$\begin{aligned}\Lambda(\omega, \zeta) &= \exp \mathbf{A} \\ &= \exp(\lambda_1) Z_1 + \exp(\lambda_2) Z_2 + \exp(\lambda_3) Z_3 + \exp(\lambda_4) Z_4.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para os auto-valores $\pm U$ e $\pm V$ encontrados, os projetores, dados por (3.7) são

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{(\mathbf{A}+U)(\mathbf{A}^2 - V^2)}{2U(U^2 - V^2)}; \; Z_2 = -\frac{(\mathbf{A}-U)(\mathbf{A}^2 - V^2)}{2U(U^2 - V^2)}; \\ Z_3 &= \frac{(\mathbf{A}+V)(\mathbf{A}^2 - U^2)}{2V(V^2 - U^2)}; \; Z_4 = -\frac{(\mathbf{A}-V)(\mathbf{A}^2 - U^2)}{2V(V^2 - U^2)}.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Uma simples substituição em (3.38) nos leva a

$$\begin{aligned}\Lambda(\omega, \zeta) &= \frac{1}{UV(U^2 - V^2)} \Big\{ \left[\mathbf{A}^2 UV - \mathbf{I} UV^3\right] \cosh U \\ &\quad + \left[\mathbf{A}^3 V - \mathbf{A} V^3\right] \sinh U + \left[\mathbf{A} U^3 - \mathbf{A}^3 U\right] \sinh U + \\ &\quad \left[\mathbf{I} U^3 V - \mathbf{A}^2 UV\right] \cosh V \Big\}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Escrevendo as formas explícitas das potências de $\mathbf{A}$ e substituindo na expressão acima nós encontraremos a forma geral para uma matriz que representa as transformações de Lorentz

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(\omega,\zeta\right) = \exp \mathbf{A} = \frac{1}{U^2 - V^2} \times$$

$$\left(\begin{array}{c}
\left(\zeta^2 - V^2\right) \cosh U + \left(U^2 - \zeta^2\right) \cosh V \\
X_1 \frac{\sinh V}{V} - Y_1 \frac{\sinh U}{U} + Q_1 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
X_2 \frac{\sinh V}{V} - Y_2 \frac{\sinh U}{U} + Q_2 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
X_3 \frac{\sinh V}{V} - Y_3 \frac{\sinh U}{U} + Q_3 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
X_1 \frac{\sinh V}{V} - Y_1 \frac{\sinh U}{U} - Q_1 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{11} - V^2 \cosh U + U^2 \cosh V \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{12} - \left(\frac{\sinh U}{U} - \frac{\sinh V}{V}\right) \left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_3 - \left(V \sinh V - U \sinh U\right) \omega_3 \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{13} + \left(\frac{\sinh U}{U} - \frac{\sinh V}{V}\right) \left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_2 + \left(V \sinh V - U \; sinhU\right) \omega_2 \\
X_2 \frac{\sinh V}{V} - Y_2 \frac{\sinh U}{U} - Q_2 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{12} + \left(\frac{\sinh U}{U} - \frac{\sinh V}{V}\right) \left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_3 + \left(V \sinh V - U \sinh U\right) \omega_3 \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{22} - V^2 \cosh U + U^2 \cosh V \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{23} - \left(\frac{\sinh U}{U} - \frac{\sinh V}{V}\right) \left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_1 - \left(V \sinh V - U \; sinhU\right) \omega_1 \\
X_3 \frac{\sinh V}{V} - Y_3 \frac{\sinh U}{U} - Q_3 \left(\cosh V - \cosh U\right) \\
\left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_2 - \left(V \sinh V - U \sinh U\right) \omega_2 \\
\left(\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{\omega}\right) \zeta_1 - \left(V \sinh V - U \sinh U\right) \omega_1 \\
\left(\cosh U - \cosh V\right) L_{33} - V^2 \cosh U + U^2 \cosh V
\end{array}\right) \tag{3.41}$$

A matriz $\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}\right)$, 4x4, foi apresentada colocando-se suas colunas umas sobre as outras, para que pudesse ser visualizada.

Os elementos $\mathbf{Q}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ que aparecem em (3.41) são dados por

$$\mathbf{Q} = \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta}\right); \tag{3.42}$$

$$\mathbf{X} = V^2 \boldsymbol{\zeta} + \left(\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}\right) \boldsymbol{\omega} = V^2 \boldsymbol{\zeta} + f_2 \boldsymbol{\omega}; \tag{3.43}$$

$$\mathbf{Y} = U^2 \boldsymbol{\zeta} + \left(\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\zeta}\right) \boldsymbol{\omega} = U^2 \boldsymbol{\zeta} + f_2 \boldsymbol{\omega}; \tag{3.44}$$

e a forma bilinear

$$L_{ij} = \zeta_i \zeta_j + \omega_i \omega_j - \delta_{ij} \omega^2. \tag{3.45}$$

Nós devemos estar atentos aos casos limites, como por exemplo o caso para auto-valores idênticos, para os quais o método apresentado falharia. Para U e V pequenos, os termos se comportam como deveriam: na diagonal $\Lambda_{11} \to 1 + \zeta^2/2$; $\Lambda_{22} \to 1 + (L_{11} - \omega^2)/2$; e para os termos fora da diagonal $\Lambda_{12} \to (Q_1/2 - \zeta_1)$; etc. Para rotações simples basta tomarmos $\zeta = 0$ e para expressões gerais de boost's puros $\omega = o$ e reproduziremos as formas usuais encontradas em livros-textos clássicos de eletrodinâmica[15].

Uma transformação finita é um elemento do grupo, obtido pela exponenciação dos elementos da álgebra. Note que, para chegarmos ás formas exponenciais para as transformações gerais dos grupos apresentados, precisaríamos apenas das equações (3.3) e dos projetores, dados por (3.7), dispensando o formalismo envolvendo as funções simétricas e a equação característica. Neste caso, as expressões gerais para os elementos do grupo poderiam ser obtidos, diretamente por exponenciação ordem a ordem, o que seria tanto mais dificíl à medida que aumentasse a ordem das matrizes em questão. Nossa apresentação, entretanto, acrescenta uma visão mais completa e detalhada para tais transformações, mostrando que expressões generalizadas para boost's e ângulos de rotação são também invariantes e podem ser encontrados com relativa facilidade.

Capítulo 4

Aplicações a Sistemas Dinâmicos

Existem duas maneiras principais de descrever a evolução de um sistema dinâmico. A primeira, que tem suas origens na mecânica clássica, consiste em encontrar as soluções das equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema. Essas soluções nos fornecem um movimento contínuo de um ponto quando representado no espaço de fase. Na segunda, podemos modelar a evolução do sistema por iterações sucessivas de uma "aplicação", e, após cada iterada, o estado do sistema é bem conhecido[16]. Neste procedimento, é como se a variável "tempo" assumisse apenas valores discretos. É possível passar da primeira à segunda descrição através do que se conhece como aplicação de Poincaré. Nossa contribuição a este tópico é fazermos a passagem inversa, de uma descrição discreta para uma contínua, preservando a noção de iteração[17]. Usando o formalismo das matrizes de Bell, podemos fazer uma "interpolação" entre os valores discretos de um aplicação mantendo, nestes intervalos, a idéia de iteração.

Iteração é um caso particular de composição de funções: dada uma aplicação $f(x) = f^{<1>}(x)$, sua primeira iterada é $f^{<2>}(x) = [f \circ f](x) = f[f(x)]$, e sua n-ésima iterada é $f^{<n>}(x) = f[f^{<n-1>}(x)] = f^{<n-1>}[f(x)]$, etc. A questão é saber quando, dado um conjunto de funções $f^{<n>}(x)$, uma interpolação, $f^{<t>}(x)$, pode ser encontrada, com valores reais de t que represente o grupo contínuo a um parâmetro (ou semigrupo) e que descreva o fluxo dinâmico do sistema. Para isto $f^{<t>}(x)$ deve satisfazer às seguintes condições:

$$f^{<t>}\left[f^{<t'>}(x)\right] = f^{<t'>}\left[f^{<t>}(x)\right] = f^{<t+t'>}(x), \tag{4.1}$$

e,

$$f^{<0>}(x) = Id(x) = x. \tag{4.2}$$

Conforme vimos no Capítulo 1, as funções dadas por (1.1) e (1.2) que satisfazem as condições $f(0) = g(0) = 0$, e $f(1) \neq 0, g(1) \neq 0$, formam um grupo. Através do formalismo dos Polinômios de Bell, associamos a cada uma dessas funções f uma matriz $B[f]$. Essas matrizes nos fornecem uma representação linear do grupo formado por funções com a operação de composição, com a matriz inversa representando a função inversa, conforme (1.42), e cujo produto (à direita) representa a operação de composição, dado por (1.37). Conseqüentemente, as iterações são representadas por potências de matrizes de Bell. O procedimento para encontrarmos $B^{<t>}[f]$, com t podendo assumir valores não-inteiros, é imediato a partir do Capítulo 3, onde definimos os projetores e as funções de matrizes. Enfim, todo o formalismo necessário para nossa aplicação já foi desenvolvido.

4.1 Iterações Contínuas

Neste ponto, dada uma função $g(t)$, estamos aptos a escrever a matriz $B^{<t>}[g]$ e sua função correspondente, a iterada contínua $g^{<t>}(x)$. A matriz de Bell de uma função g cujo primeiro coeficiente de Taylor seja $g_1 = a$, terá as letras do alfabeto auto-valor dadas por potências de a, $\mathbf{a} = \left(a^1, a^2, ..., a^N\right)$ e seu recíproco $\mathbf{a}^{*}= \left(-a{-}^1, -a^{-2}, ..., -a^{-N}\right)$. Interessa-nos escrever os projetores usando a base $\left(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, ...\mathbf{B}^N\right)$, dados por (3.13), que exclui a identidade. Isto porque as aplicações de nosso interesse, como por exemplo a aplicação logística[1] [18], possuem os pontos limites $g(0) = g(1) = 0$, e têm o índice de Brouwer[19] igual a igual a 1, enquanto a aplicação da identidade tem pontos limites diferentes e possui índice de Brouwer igual a 0. Com $[\Lambda]_{ik} = a^{ik}$, $\det \Lambda = a^{N(N+1)/2} \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} \left(a^i - a^j\right)$, e

[1]Para a aplicação logística temos

$$x_{n+1} = ax_n\left(1 - x_n\right)$$

$$\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]=\sum_{k=1}^{N}\left[\mathbf{\Lambda}^{-1}\right]_{ik}\mathbf{B}^k; \tag{4.3}$$

de acordo com (3.14) teremos

$$\left[\mathbf{\Lambda}^{-1}\right]_{ik}=\frac{\sum_{j=0}^{k-1}(a)^{i(j-k)}(-)^j\,\mathrm{e}_{N-j}\left[\mathrm{a}\right]}{\sum_{r=1}^{N}\sum_{j=0}^{r-1}(a)^{ij}(-)^j\,\mathrm{e}_{N-j}\left[\mathrm{a}\right]}. \tag{4.4}$$

Destas equações segue-se que $\mathbf{Z}_i\left[a^n\right]=\sum_{k=1}^{N}\Lambda_{ik}^{-1}a^{nk}=\delta_i^n$, e por conseguinte que $\mathtt{tr}\left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]=1$ e $\mathtt{tr}\left\{\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\mathbf{B}\right\}=a^i$. Alguns resultados importantes são imediatos: (i) os projetores $\mathbf{Z}_i's$ são auto-matrizes de $\mathbf{B}$, ou seja, $\mathbf{B}\mathbf{Z}_i=a^i\mathbf{Z}_i$; (ii) conseqüentemente, $f\left(\mathbf{B}\right)\mathbf{Z}_i=f\left(a^i\right)\mathbf{Z}_i$, que tem como um caso particular o seguinte resultado:

$$\mathbf{B}^t\mathbf{Z}_i=a^{it}\mathbf{Z}_i. \tag{4.5}$$

Os $\mathbf{Z}_i's$ são dados pela soma de matrizes triangulares, portanto, também são matrizes triangulares. Não são invertíveis, por isso não podem ser escritos como matrizes de Bell de qualquer outra função. Apresentaremos, para N=3, $\mathbf{Z}_i^{(N)}\left[\mathbf{B}\left[g\right]\right]$:

$$\mathbf{Z}_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{g_2}{g_1(1-g_1)} & 0 & 0\\ \frac{3g_2^2+g_3(1-g_1)}{g_1(1-g_1)^2(1+g_1)} & 0 & 0\end{pmatrix};\mathbf{Z}_2^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{g_2}{g_1(1-g_1)} & 1 & 0\\ -\frac{3g_2^2}{g_1^2(1-g_1)^2} & \frac{3g_2}{g_1(1-g_1)} & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_3^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{3g_2^2-g_1g_3(1-g_1)}{g_1^2(1-g_1)^2(1+g_1)} & -\frac{3g_2}{g_1(1-g_1)} & 1\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Apesar de não serem matrizes de Bell, os projetores possuem uma das propriedades destas: para cada N, o projetor $\mathbf{Z}_j^{(N)}$ contém, em suas linhas superiores, os projetores $\mathbf{Z}_j^{(k)}$ para $k\leq N$. Assim, para $\mathbf{Z}_j^{(2)}$ teremos

$$\mathbf{Z}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{g_2}{g_1(1-g_1)} & 0\end{pmatrix};\mathbf{Z}_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{g_2}{g_1(1-g_1)} & 1\end{pmatrix}.$$

Podemos tomar os elementos da primeira columa dos $\mathbf{Z}_i's$ para definí-los como os coeficientes da função

$$
\begin{aligned}
R_i^{(N)}(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1} && (4.7)\\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{\Lambda}_{ik}^{-1} g^{<k>}(x)\,. && (4.8)
\end{aligned}
$$

Esta expressão foi obtida usando (4.3). A cada projetor $\mathbf{Z}_i$ corresponde uma "função elementar" $R_i^{(N)}(x)$, que reflete, parcialmente, a relação existente entre as séries e suas matrizes de Bell. Se em (4.7) fizermos a soma de todos os $R_i's$, e de (3.5) tomarmos $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{Z}_i$, teremos

$$
\sum_{i=1}^{N} R_i^{(N)}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \left[\sum_{i=1}^{N} \mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \delta_{r1} = x. \tag{4.9}
$$

Observe-se que, se os projetores nos fornecem uma decomposição da matriz identidade, as funções elementares decompoẽm, por sua vez, a função identidade:

$$
Id = \sum_{i=1}^{N} R_i^{(N)}. \tag{4.10}
$$

As funções de matrizes são dadas por (3.2), que aplicada a $\mathbf{B}\left[g\right]$ nos permite escrever

$$
B^t = \sum_{i=1}^{N} a^{it} \mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right] = \sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)}(t)\, \mathbf{B}^k, \tag{4.11}
$$

com

$$
C_k^{(N)}(t) = \sum_{i=1}^{N} a^{it} \mathbf{\Lambda}_{ik}^{-1}. \tag{4.12}
$$

A expressão para a função representando a iterada contínua é

$$
g^{<t>}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} g_r^{<t>}, \tag{4.13}
$$

cujos coeficientes são

$$
\begin{aligned}
g_r^{<t>} &= \left[B^t\left[g\right]\right]_{r1} = \sum_{i=1}^{N} a^{it}\left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1} = \sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)}(t)\left[\mathbf{B}\left[g\right]\right]_{r1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)}(t)\, g_r^{<k>}. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
g^{<t>}(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)}(t)\, g^{<k>}(x) = \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{N} a^{it}\Lambda_{ik}^{-1}\right] g^{<k>}(x). \qquad (4.15)
$$

A equação acima pode ser reescrita separando-se a dependência temporal e espacial. De acordo com a definição (4.8) temos

$$
g^{<t>}(x) = \sum_{k=1}^{N} a^{kt} R_k^{(N)}(x). \qquad (4.16)
$$

A condição anunciada em (4.2), à qual a equação acima deve satisfazer, pode ser verificada imediatamente usando (4.10), $g^{<0>}(x) = Id$. Para $t = 1$, temos uma interessante decomposição

$$
g(x) = \sum_{k=1}^{N} a^{k} R_k^{(N)}(x). \qquad (4.17)
$$

Resta-nos ainda mostrar que (4.16) satisfaz a condição (4.1). Antes, porém, note-se que, aplicando o teorema multinomial, (1.10), à (4.7) temos

$$
\begin{aligned}
R_i^{(N)}\left[g^{<t>}(x)\right] &= \sum_{r=1}^{\infty}\left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1}\frac{\left[g^{<t>}(x)\right]^r}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{j\geq r}\frac{x^j}{j!}\mathbf{B}_{jr}\left[g^{<t>}\right]\left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{r=1}^{j}\mathbf{B}_{jr}^{t}\left[g\right]\left[\mathbf{Z}_i\left[\mathbf{B}\right]\right]_{r1} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\left[\mathbf{B}^t\mathbf{Z}_i\right]_{j1}. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
g^{<t'>}\left(g^{<t>}(x)\right) &= \sum_{i=1}^{N} a^{it'} R_i^{(N)}\left[g^{<t>}(x)\right] = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\sum_{i=1}^{N} a^{it'}\left[\mathbf{B}^t\mathbf{Z}_i\right]_{r1} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\left[\mathbf{B}^t\sum_{i=1}^{N} a^{it'}\mathbf{Z}_i\right]_{r1} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\left[\mathbf{B}^t\mathbf{B}^{t'}\right]_{r1} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^r}{r!} g_{r1}^{<t+t'>} = g^{<t+t'>}(x), \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

satisfazendo assim a condição que faltava. Note-se ainda que, usando (4.5) e (4.7) em (4.18), obtemos

$$
R_k^{(N)}\left[g^{<t>}(x)\right] = a^{kt} R_k^{(N)}(x) \qquad (4.20)
$$

e, conseqüentemente,

$$
R_k^{(N)}\left[g^{<t+t'>}(x)\right] = a^{k(t+t')} R_k^{(N)}(x) = a^{kt'} R_k^{(N)}\left[g^{<t>}(x)\right]. \qquad (4.21)
$$

As duas últimas expressões mostram que a decomposição da função é preservada no tempo, o que nos permite escrever

$$
g(x) = \sum_{i=1}^{N} R_i^{(N)}\left[g(x)\right]; \; g^{<t>}(x) = \sum_{i=1}^{N} R_i^{(N)}\left[g^{<t>}(x)\right]. \qquad (4.22)
$$

As expressões acima são escritas para cada valor de N e podem ser aproximadas para cada ordem. Obviamente, seus valores exatos são obtidos no limite $N \to \infty$. Neste limite, as expressões assumem a forma

$$
\begin{aligned}
R_i(x) &= \sum_{k\geq 1} \Lambda_{ik}^{-1} g^{<k>}(x); \qquad (4.23) \\
g(x) &= \sum_{k\geq 1} a^k R_k(x); \qquad (4.24) \\
g^{<t>}(x) &= \sum_{k\geq 1} a^{kt} R_k(x). \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Do que vimos sobre as funções elementares R_k ficamos tentados a dizer que estas desempenham, no espaço das funções com a operação de composição , o papel de projetores, o que não é verdade. Se calcularmos $R_i\left[R_j(x)\right]$, obtemos $R_i(x^j/j!)$. Assim, a composição destas funções nos leva a uma mudança de variáveis. Dessa forma, a propriedade de idempotência não é, em geral, satisfeita pelos R_i's, ou seja, $R_i \circ R_i \neq R_i$. Veremos, a seguir, um exemplo em que estas propriedades podem ser testadas.

Vamos introduzir a definição $\varepsilon = \ln a$ e reescrever (4.25) como

$$x(t) = g^{<t>}(x_0) = \sum_{k\geq 1} \exp(\varepsilon kt)\, R_k(x_0), \tag{4.26}$$

que é uma decomposição de $g^{<t>}(x)$ em uma soma de modos, cada um deles evoluindo independentemente de acordo com

$$x_k(t) = \exp(\varepsilon kt)\, x_k(0) = \exp(\varepsilon kt)\, R_k(x_0). \tag{4.27}$$

A "frequência" imaginária εk desempenha o papel de um "exponente de Lyapunov modular" do k-ésimo modo. Assim, a equação (4.26) pode ser interpretada como sendo um fluxo "multi-hamiltoniano" $x(t)$, e a cada componente do projetor corresponde uma hamiltoniana. As equações (4.20) e (4.21) mostram $R_k^{(N)}(x)$ como uma representação do grupo uni-dimensional engendrado pelo k-ésimo fluxo dinâmico

$$R_i\left[g^{<t>}(x)\right] = \exp(\varepsilon kt)\, R_i\left[g^{<0>}(x)\right]. \tag{4.28}$$

A função $g^{<t>}(x)$ é uma interpolação de Lagrange [9] com a escolha adequada da variável $(g_1)^t = a^t$. Para valores inteiros de t ela coincide com as iteradas usualmente conhecidas, e para valores intermediários ela mantém a idéia de iteração. Temos, portanto, uma homotopia de todas as iterações discretas usuais, ou seja, uma função que é uma deformação contínua delas todas.

À variável t se tem dado o sentido de "tempo". Se ela realmente o for, a $g^{<n>}(x)$ corresponderá o n-ésimo ponto de uma aplicação de Poincaré. Existem, em princípio, muitos fluxos dinâmicos correspondendo a uma aplicação de Poincaré. À função $g^{<t>}(x)$, como definida em (4.25), corresponderia uma classe desses fluxos: aqueles cujos intervalos de tempo entre sucessivos pontos na seção de Poincaré fossem iguais. Para considerar outros casos precisaríamos definir qualquer função monótona de um "tempo" inicialmente definido, como um outro "tempo".

4.2 Aplicação à Turbulência

Vamos apresentar uma aplicação de nosso resultado (4.25) que sugere alguma relação entre osciladores harmônicos e turbulência. Considere um caso especial da aplicação logística, com o parâmetro a=4 fixo

$$g(x) = 4x(1-x). \tag{4.29}$$

Esta equação (conhecida como "poor man's Navier-Stokes") é usada para modelar o campo de velocidades de um fluxo em regime de turbulência desenvolvida[20]. O aplicação logístico leva pontos do intervalo $[0,1]$ nele mesmo. Uma transformação de coordenadas $x' = 2x-1$, $v(y) = 2y-1$ leva pontos do intervalo $[-1,1]$ também nele mesmo. A aplicação logística $v(y)$, assume a forma

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[1 - T_2(2x-1)\right], \tag{4.30}$$

em que $T_2(z) = 2z^2 - 1 = \cos[2\arccos z]$ é o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo, de segunda ordem. Podemos observar que, usando $v^{<-1>}(u) = (1/2)(u+1)$,

$$T_2(z) = -v \circ g \circ v^{<-1>}(z). \tag{4.31}$$

Iterando novamente esta expressão tem-se $[T_2 \circ T_2](z) = -v \circ g \circ v^{<-1>}[-v] \circ g \circ v^{<-1>}(z)$. Como $v^{<-1>}[-v(u)] = 1-u$, e $g(1-u) = g(u)$, teremos $T_2^{<2>}(z) = -v \circ g^{<2>} \circ v^{<-1>}(z)$. Da mesma forma, para a n-ésima iterada

$$T_2^{<n>}(z) = -v \circ g^{<n>} \circ v^{<-1>}(z) = 1 - 2g^{<n>}\left[\frac{1}{2}(1+z)\right]. \tag{4.32}$$

Os polinômios de Chebyshev possuem uma interessante propriedade (que pode ser facilmente verificada de sua definição): eles transformam sua composição num produto de índices

$$T_n[T_m(z)] = [T_n \circ T_m](z) = T_{mn}(z). \tag{4.33}$$

Portanto,

$$T_2^{<n>}(z) = T_{2^n}(z) = \cos\left[2^n \arccos z\right], \tag{4.34}$$

o que nos possibilita escrever expressões fechadas para a n-ésima iterada de g: $g^{<n>} = v^{<-1>} \circ \left[-T_{2^n}(z)\right] \circ v$, ou ainda

$$\begin{aligned} g^{<n>}(x) &= \frac{1}{2}\left[1 - T_{2^n}(2x-1)\right] = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left[2^n \arccos(2x-1)\right]\right\} \\ &= \sin^2\left[2^{n-1} \arccos(2x-1)\right]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

A versão contínua desta iterada é dada por

$$g^{<\alpha>}(x) = \frac{1}{2}\left\{1 - cos\left[2^\alpha \arccos(2x-1)\right]\right\}, \tag{4.36}$$

resultado que poderia ser ingênuamente antecipado de (4.35); nós o demonstraremos. Para o caso em que a=4, o alfabeto auto-valor $(4^1, 4^2, 4^3, \ldots)$ e a matriz Λ^{-1}_{jn}, dada em (4.5), são tais que $\sum_{n\geq 1} \Lambda^{-1}_{kn} 4^{np} = \delta^p_k$. Usando a expressão que envolve o cosseno em (4.35), expandida na forma

$$g^{<n>}(x) = \frac{1}{2}\sum_{p\geq 1} \frac{(-)^p}{(2p)!} 4^{np} \left[\arccos(2x-1)\right]^{2p},$$

e calculando as funções elementares R_k, dadas por (4.23), temos

$$R_k(x) = \sum_{n\geq 1} \Lambda^{-1}_{kn} g^{<n>}(x) = -\frac{1}{2}\frac{(-)^k}{(2k)!}\left[\arccos(2x-1)\right]^{2k}, \tag{4.37}$$

Substituindo o resultado acima em (4.25) temos

$$g^{<\alpha>}(x) = \sum_{k\geq 1} 4^{k\alpha} R_k(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} \frac{(-)^k}{(2k)!}\left[\arccos(2x-1)\right]^{2k}, \tag{4.38}$$

que é exatamente (4.36).

Relembremos alguns fatos sobre o oscilador duplo. Dados $x = \cos\omega t$ e $y = \cos n\omega t$, temos $y = \cos\left[n \arccos x\right] = T_n[x]$, que é solução da equação diferencial $(1-x^2)y'' - xy' - n^2y = 0$. Estas soluções nos levam às já conhecidas curvas de Lissajous finitas. Quando as duas freqüências não são comensuráveis, $y = \cos \nu\omega t$, a equação diferencial é

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' - \nu^2 y = 0, \tag{4.39}$$

cuja solução $y = \cos[\nu \arccos x]$ não é, em geral, um polinômio. As funções relacionadas às soluções de (4.39) são uma "versão contínua" dos polinômios de Chebyshev, e de (4.36) temos

$$T_{2^\alpha}(z) = \cos[2^\alpha \arccos(2x-1)] = 1 - 2g^{<\alpha>}\left[\frac{1}{2}(1+z)\right]. \tag{4.40}$$

Para cada valor de α, T_{2^α} é solução de (4.39), com $\nu = 2^\alpha$, e corresponde a uma curva de Lissajous geral, que para ν irracional, será infinita. O parâmetro contínuo α, que pode ser interpretado como "tempo" para a aplicação logística, é um índice para a curva de Lissajous do ponto de vista do oscilador harmônico duplo. Para ν irracional, cada uma dessas curvas é densa no espaço (x, y)[21] e suas trajetórias não são primeiro-separáveis[19]. O conjunto dos valores irracionais de α constitui um espaço não separável, em que as trajetórias são indistingüíveis. Assim, apesar de ser um modelo simples para o campo de velocidades em regime de turbulência, dado por (4.29), o resultado que encontramos sugere que este pode assumir um número muito grande de valores não separáveis.

Este exemplo é ainda bastante interessante por ser um dos raros casos em que fomos capazes de calcular, explícitamente, as sempre complicadas expressões para os $R_k's$, uma vez que estes dependem de conhecermos formas fechadas para a matriz Λ^{-1}, fato que citamos ser ainda um problema ainda não resolvido em análise combinatória, envolvendo a soma de funções simétricas.

Neste capítulo introduzimos um conceito novo, o de "iterações contínuas", que nos permite interpolar os pontos da aplicação de Poincaré para valores não inteiros do parâmetro que chamamos de tempo. Isto só foi possível usando o formalismo das matrizes de Bell. Através dele, o grupo de funções com a operação de composição tem uma representação linear dada pelas matrizes de Bell, com a operação correspondente de produto de matrizes à direita. Ao levarmos a cabo este procedimento e escrevermos separadamente as dependências temporal e espacial de $g^{<t>}(x)$ surge um fato curioso: esta decomposição é feita em modos independentes, um para cada projetor da matriz de Bell correspondente.

Conclusão

Este texto resume algumas das principais aplicações, por nós estudadas, dos polinômios de Bell. De uma maneira geral, eles se apresentam como um poderosa ferramenta organizadora, possibilitando reescrevermos fórmulas já conhecidas numa forma mais compacta, e às vezes mais geral, conforme mostramos nas aplicações às álgebras de Lie. N'outras, eles desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de um conceito novo, como o foi para o caso das "iterações contínuas".

As aplicações mais interessantes foram mostradas nos capítulos 3 e 4. Elas estão relacionadas a assuntos de interesse em Física, num caso generalizando expressões de reconhecido interesse em teoria de campos, e no outro, indo na contra mão das tendências das pesquisas em sistemas dinâmicos, passando de uma descrição discreta para uma contínua. Acreditamos ser esta última nossa contribuição mais interessante e importante. Ela abre novas possibilidades no estudo, e entendimento mais detalhado, das bifurcações e da relação entre as descrições de um sistema via equação diferencial e iterações.

Dois importantes aspectos apresentados nas nossas aplicações devem ser ressaltados:

1. Este formalismo nos permite encontrar expressões completas para um elemento geral de um grupo de Lie, assim como de seus invariantes, de uma maneira simples. Este fato torna essa abordagem cada vez mais interessante à medida em que o rank das matrizes que representam os elementos da álgebra aumenta. Uma generalização do formalismo apresentado permite que estes cálculos sejam feitos para grupos cujos membros da álgebra apresentem degenerescência.

2. O principal mérito dos polinômios e matrizes de Bell, quando aplicados às iterações da aplicação logística, é permitir que seja feita uma interpolação dos pontos da aplicação de Poincaré correspondentes, passando de um formalismo discretizado, na variável que estamos chamando de

tempo, t, para valores contínuos da mesma, sem que a idéia de iteração seja perdida.

Aplicações outras envolvendo este formalismo foram investigadas, entre elas, as classes características[13] e tópicos de mecânica estatística[22].

Bibliografia

[1] Comtet L., *Advanced Combinatorics*, 1974, Reidel, Dordrecht.

[2] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, 1958, Wiley, New York.

[3] Bell E. T., *Exponential Polynomials*, Annals of Math. **35** (1934), 258.

[4] Aldrovandi R. Monte Lima I., J. Phys A: Math Gen **13** (1980), 3685-3696.

[5] Abramowitz M. and Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Function*, 1965, Dover, New York.

[6] Referência Histórica: Lagrange L. de, Mém. Acad. Roy. Sci. Belles-Lettres de Berlin **24**, (1770).

[7] Henrici P., Applied and Computacional Complex Analysis, J. Wiley, New York, 1974.

[8] Bellman R., *Introduction to Matrix Analysis*, 1960, McGraw Hill, New York.

[9] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, Vol **1**, 1960, Chelsea Pub. Co., New York.

[10] O. Schreier and E. Sperner, *Modern Algebra and Matrix Theory*, 1951, Chelsea Pub. Co., New York.

[11] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, Vol **2**, 1960, Chelsea Pub. Co., New York.

[12] Bellman R., referência [8], Cap. 13; Schur I., Math. Ann. **66**, 488, (1909).

[13] Aldrovandi R., Barbosa A. L, and Freitas L. P., Int. Jour. of Theor. Phys., Vol **36** (1997), 3021.

[14] Lee T. D., *Particle Physics an Introduction to Field Theory*, 1981, Harwood, New York.

[15] Jackson J. D., *Classical Eletrodynamics*, 2nd ed., 1975, J. Wiley, New York.

[16] Rasband S. N., *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, 1974, J. Wiley, New York.

[17] R.Aldrovandi and L. Freitas, *"Continuous Iteration of Dynamical Maps"*, aceito para ser publicado no J. Math. Phys., outubro-novembro de 1998.

[18] Ott E., *Chaos in Dynamical Systems*, 1993, Cambridge University Press, Cambridge.

[19] Aldrovandi R. and Pereira J. G., *An Introduction to Geometrical Physics*, 1995, Word Scientific, Singapure.

[20] Frisch U., *Turbulence*, 1996, Cambridge University Press, Cambridge.

[21] Balescu, R., *equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, 1975, J. Wiley, New York. (apêndice)

[22] Aldrovandi R. and Monte Lima I., Astrophys. & Space Sci. **90** (1983), 179.