



93



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/94

Elétron Planar Submetido a um Campo Magnético Intenso

Ivan José Lautenschleguer

25 FEV 94

H. Z...

H. Z...

for Francisco...

Orientador

Prof. Dr. Abraham Hirsz Zimmerman



Fevereiro 1994

Agradecimentos

Gostaria de tecer meus sinceros agradecimentos à Fapesp, pelo suporte financeiro.

É extremamente difícil citar o tipo de contribuição delegada a mim por cada pessoa com quem me deparei. Eis alguns dos nomes particularmente importantes em minha vida, aproveitando concomitantemente a oportunidade para externar a minha gratidão :

* Otávio. Pela sua amizade e por sua maneira sui generis de explicar passagens matemáticas de uma forma extremamente simples.

* Cláudio. Foi através dele que eu descobri a Pessoa mais importante da minha vida: Jesus Cristo.

* Kokubun. Tenho me beneficiado muito de sua apostila sobre Latex.

* Eliezer, Luiz A. Saeger. Por inúmeras sugestões úteis em relação à confecção deste trabalho.

* Luiz A. Saeger, Orlando, Kokubun e Sílvio. Pela assistência na digitação do Latex.

* Prof. Galeão, prof. Bund, prof. Lauro Tomio, prof. Matsas, Luiz A. Saeger, Eliezer, Kwok, Mauro, Felice, Orlando, Sílvio, Ana Lúcia, Maria, Antônio e Marina. Pelo meu amadurecimento como ser humano ao contemplar a bondade e a grandiosidade dessas pessoas.

* Luiz Barreiro, Marco Aurélio, Andrea, Thut, Carlos Pires, Carlos Fernando, Clóvis, Pedro e Jorge. Pela convivência sadia e descontraída no dia a dia.

* Funcionários do IFT: Antônio, Marina, Zé Francisco, Marcelo, Alexandre, Laércio, Orides, Susumu, Luzinete, Vilma, Laura, Rosane, Walter e Zezé. Por terem me auxiliado nos assuntos referentes às suas esferas de trabalho.

* Todo o pessoal de Rio Claro, mormente meus primos Allan, Dayani, Neto, minha avó Claudina e minha tia Carmem. Tenho compartilhado de momentos prazerosos com todos os meus familiares.

* Professores de Rio Claro: Makoto, René e Héssel. Lembrar-me-ei sempre dos seus ensinamentos concernentes à física.

* Prof. Galeão. Pela extrema competência com que ele maneja assuntos referentes ao corpo discente e também porque foi através da sua pessoa que eu conheci o prof. Zimmerman.

* Prof. Pimentel. Pelo incentivo e confiança dirigidos à minha pessoa.

* Prof. Agostinho. Por suas considerações sempre precisas em relação a questões de ordem física.

* Prof. Frank. Por ter se mostrado predisposto a me ajudar, qualquer que fosse a ocasião, deixando muitas vezes o seu trabalho a fim de me esclarecer alguma dúvida.

* Prof. Zimmerman. Tenho uma dívida incalculável de gratidão para com esse professor. Através da convivência diária com ele, pude não só reciclar meus conhecimentos físicos, como também evoluir como ser humano. Talvez, a passagem que melhor ilustrasse esse grande professor seria: é provável que alguém não receberia um peixe, caso pedisse a esse professor; contudo obteria dele, com absoluta certeza, o aprendizado de como se pescar.

* Meus pais: Abel e Anita. Pelo incentivo, confiança, apoio sobretudo nas horas difíceis, exemplo de como se viver dignamente e amor. Não tenho como retribuir tudo o que vocês fizeram e fazem por mim. O que, no entanto, posso fazer é pedir ao Deus Todo-Poderoso, Pai do meu Senhor Jesus, que os agracie com paz, saúde, longevidade nesse mundo e com a vida eterna no mundo vindouro.

* Senhor Jesus Cristo. Eis alguns dos nomes como Ele também é conhecido: A Estrela Resplandescente do Amanhã, O Leão de Judá, O Lírio dos Vales, O Alfa e o Ômega, O Princípio e o Fim, O Verbo que Se fez Carne, O Príncipe da Paz, Deus Forte, Pai da Eternidade, Rocha.

Senhor Jesus, estive pensando e obtive a conclusão de que eu, de mim mesmo, não posso oferecer-Te nada, uma vez que todas as coisas provêm de Ti.

Sei perfeitamente que qualquer aluno do IFT teria feito um trabalho infinitamente superior a este, contudo eu o coloco aos Teus pés, na esperança de que o Senhor o aceite pelo simples fato de eu o estar oferecendo a Ti de todo o meu coração.

O meu desejo é conhecer-Te mais e mais e tudo o que peço é que essa transformação implantada recentemente por Ti em meu ser tenha como conseqüência um modo de viver que

agrade cada vez mais não só aos homens aqui da Terra como também ao Pai Celestial.

Para finalizar, segue uma mensagem, a qual achou lugar em meu coração.

Estavam caminhando lado a lado um homem e o Senhor Jesus Cristo. Enquanto o caminho não estava sendo difícil, esse homem olhava para trás e verificava que quatro pegadas ficavam marcadas no chão. Acontece, porém, que o caminho tornou-se extremamente difícil a tal ponto de o homem, quase desmaiando, olhar para trás e notar que existiam apenas duas pegadas marcadas no chão. Ele, então, pensou consigo mesmo: eu estou sozinho. Olhando para a frente e constatando que o final do caminho estava longe, ele não resistiu e acabou por desmaiar.

Quando recobrou a consciência, notou que havia conseguido alcançar o final do caminho. Foi, então, que finalmente percebera que havia se enganado. Aquelas duas pegadas marcadas no chão não eram suas; na verdade, aquelas duas pegadas no chão eram do Senhor Jesus.

Resumo

A degenerescência dos níveis de Landau é estudada através do emprego dos operadores de translação magnética, onde certas combinações satisfazem as relações de $SU(2)_q$. As funções de Laughlin que caracterizam o efeito Hall quântico são obtidas pelo formalismo dos operadores de Vértice. Verifica-se, também, a conexão entre as funções de Laughlin e soluções solitônicas.

Palavras-chaves: efeito Aharonov-Bohm, nível de Landau, álgebra $SU(2)_q$, operadores de Vértice, função de Laughlin.

Área de Conhecimento: 1.05.03.01-3.

Abstract

The degeneracy of the Landau levels is studied through the magnetic translation operators, where certain combinations satisfy $SU(2)_q$. Laughlin functions that describe the quantum Hall effect are obtained by the Vertex operator formalism. It is also verified a connection between Laughlin functions and soliton solutions.

Key words: Aharonov-Bohm effect, Landau level, algebra $SU(2)_q$, Vertex operators, Laughlin function.

Índice

Introdução	1
1 Anomalia na mecânica quântica do ponto	5
2 O efeito Aharonov-Bohm	15
3 Um elétron planar no campo magnético constante, externo e perpendicular - níveis de Landau	22
4 Realização bosônica e fermiônica de álgebras quânticas	28
5 A construção de Schwinger para operadores não locais - operadores aniônicos	34
6 Conceitos básicos da álgebra W infinito e os níveis de Landau focalizados sob o prisma do grupo $SU(2)_q$	40
7 Conexão entre as funções de Laughlin e as soluções solitônicas	53
8 Ânions em um campo magnético	59
9 Obtenção das funções de onda dos tipos I e II através do formalismo dos operadores de Vértice	71
10 Expansão das funções de onda de Laughlin em termos das funções de onda de Slater	78

Conclusão	90
A	92
B	94
C	95
D	97
E	99
F	100
G	102
H	103
I	105
J	107
K	108
L	111
M	114
N	116
O	118
Referências	119

1972

Relatório de Trabalho

Índice das Figuras

Permutação do composto partícula carregada + fluxo.	13
Placa cilíndrica oca.	15
Placa cilíndrica oca atravessada por campo magnético uniforme.	16
Elétron partindo de uma fonte e executando duas trajetórias possíveis.	17
Composto carga-fluxo.	20
Configuração de um sistema composto de duas partículas.	59
Configuração do sistema de duas partículas após uma rotação de um ângulo θ	59
Permutação de duas partículas segundo um ângulo $\theta = \pi$	60
Permutação de duas partículas segundo um ângulo $\theta = -\pi$	60

Relação das Tabelas

Introdução

10.1 Tabela dos caracteres do grupo simétrico S_2 87

10.2 Tabela parcial dos caracteres do grupo simétrico S_6 89

Introdução

Ânions [1], partículas com estatística arbitrária em $2+1$ dimensões, fornecem um modelo fascinante no estudo de efeitos topológicos em mecânica quântica e teoria quântica de campo [2]. Eles têm desempenhado importante papel no nosso entendimento de certos fenômenos da matéria condensada, mais notadamente o efeito Hall quântico [3]. Um profundo entendimento da teoria quântica de muitos corpos aniônicos, no nível que temos em relação à teoria de muitos corpos bosônicos e fermiônicos ainda está em falta. Contudo, significativos progressos têm sido feitos em vários modelos e também utilizando métodos numéricos e aproximados.

O problema aniônico de dois corpos é completamente solúvel e Wu [4] estudou também o problema de três ânions utilizando um potencial harmônico, obtendo funções de onda exatas. Esse enfoque tem sido recentemente estendido por Chou [5] para o problema de N ânions na presença de um potencial harmônico. Johnson e Canright [6] analisaram o problema dos ânions em um campo magnético externo, obtendo resultados detalhados para o problema de dois corpos e também resultados parciais para o problema de N corpos.

Esse problema de N corpos tem sido estudado de uma forma mais detalhada através da surpreendente conexão entre teorias aniônicas e teoria das cordas [7].

Por outro lado, desde os primeiros relatos sobre o assunto [1, 2, 8, 9], tornou-se claro que os ânions estão profundamente relacionados ao grupo das tranças do qual eles são representações abelianas, da mesma forma que bósons e férmions são representações abelianas do grupo das permutações. A aparição do grupo das tranças em vez do grupo das permutações é uma característica peculiar de sistemas bidimensionais; de fato, como é bem conhecido, em três

ou mais dimensões somente bósons e férmions podem existir de tal maneira que as funções de onda de muitos corpos, ou são simétricas ou anti-simétricas na permutação de quaisquer duas partículas. Em duas dimensões, quando permutamos duas partículas idênticas, não é mais suficiente compararmos o estado final em relação ao inicial, mas também é necessário especificarmos como as duas partículas foram permutadas, isto é, precisamos detalhar o tipo das trajetórias. Esse fato torna a mecânica quântica de ânions extremamente difícil.

Uma possibilidade de contornarmos esse problema seria explorar as simetrias características de sistemas aniônicos. Isso pode ser conseguido utilizando os grupos quânticos, os quais são deformações das álgebras de Lie ordinárias [10, 11, 12].

É bem conhecido que osciladores bosônicos e fermiônicos, caracterizados pelas álgebras de Heisenberg comutativas ou anticomutativas, podem ser combinados à construção de Schwinger para formar álgebras de Lie não abelianas com o grupo da permutação como seu centralizador. Analogamente, podemos usar os osciladores aniônicos com propriedades do grupo das tranças e relações de comutação q -deformadas para construir álgebras não abelianas com o grupo das tranças como seu centralizador, isto é, construir grupos quânticos não abelianos.

O movimento de elétrons em uma superfície bidimensional em um campo magnético constante e externo, exibe características bem diferentes do movimento em um campo magnético nulo. O problema de um corpo possui degenerescência [13] em cada nível de energia (chamado de nível de Landau). A degenerescência do nível de Landau é de suma importância para considerações concernentes ao efeito Hall quântico.

O efeito Hall quântico é caracterizado por um conjunto discreto do fator de preenchimento ν (ou condutividade Hall dada por $\sigma_{x_1 x_2} = \nu q^2/h$) o qual é definido pelo número de elétrons dividido pelo fluxo magnético. Quando $\nu = n$, onde n é inteiro (efeito Hall quântico inteiro-IQHE), notamos a presença de plateaux, ou seja, embora a intensidade do campo magnético aumente, a condutividade Hall permanece constante e dada por $\sigma_{x_1 x_2} = \nu q^2/h$ enquanto que a condutividade longitudinal (ao longo da direção do campo elétrico) é nula. Quando $\nu = 1/m$ ($m = 2k + 1, k \in Z_+$)(efeito Hall quântico fracionário-FQHE), notamos novamente a

presença de plateaux.

Um fato que torna o efeito Hall quântico muito útil em aplicações práticas e muito interessante na análise teórica é a grande precisão com a qual a quantização é observada; $\Delta\nu \leq 10^{-8}$ para o IQHE e $\Delta\nu \leq 10^{-5}$ para o FQHE.

Experimentalmente, observa-se o efeito Hall quântico para um sistema bidimensional de elétrons a baixa temperatura e em um forte campo magnético. Sob essa condição, os elétrons são dispostos em uma fina camada (aproximadamente 100 \AA) entre dois semicondutores. Mais precisamente, a condição física para o IQHE é temperatura entre aproximadamente 1 e 4 K e campo magnético de intensidade entre 3 e 16 teslas, enquanto que a condição física para o FQHE é temperatura entre 20 e 100 mK e campo magnético de intensidade entre 15 e 30 teslas.

A temperatura baixa congela os graus de liberdade para o movimento perpendicular ao plano x_1x_2 , de tal forma que o sistema é efetivamente um sistema quântico bidimensional; por outro lado o forte campo magnético alinha os graus de liberdade de spin.

O IQHE e o FQHE têm vários aspectos em comum, como por exemplo: a bidimensionalidade do sistema, a quantização da condutividade Hall em unidades de q^2/h com a simultânea condutividade longitudinal tendo o valor zero. Em outros aspectos, os dois efeitos são completamente diferentes, como por exemplo: o IQHE é uma manifestação das propriedades de transporte de um gás de partículas carregadas sem interação, na presença de um campo magnético perpendicular de grande intensidade, enquanto que o FQHE resulta da interação entre as partículas do mesmo sistema, dando lugar a uma nova forma de estado fundamental coletivo.

Essa dissertação está organizada como segue.

No capítulo 1, por meio da análise de um simples exemplo (partícula movendo-se em uma circunferência de raio um) sob dois prismas diferentes, constata-se o surgimento do que denominamos funções *multi-valued* e funções *single-valued*.

No capítulo 2, estudamos o efeito Aharonov-Bohm, efeito esse que está intimamente relacionado com o sistema composto partícula + fluxo.

No capítulo 3, estuda-se o movimento de uma partícula carregada sob a influência de um campo magnético.

No capítulo 4, constrói-se a álgebra $SU(2)_q$ através do método de Schwinger.

No capítulo 5, o método de Schwinger é empregado usando-se operadores não locais. Um caso particular desses operadores não locais são os operadores aniônicos.

No capítulo 6, estudamos a degenerescência do nível de Landau através do uso dos operadores translação magnética.

No capítulo 7, observa-se a ligação entre as funções de Laughlin e as soluções solitônicas.

No capítulo 8, estuda-se um sistema de N ânions confinados em um plano e submetidos à ação de um campo magnético perpendicular a esse plano. Constata-se que as autofunções simultâneas do momento angular total e da hamiltoniana enquadram-se em dois grupos: funções de onda do tipo I e funções de onda do tipo II .

No capítulo 9, através do uso dos operadores de Vértice, conseguimos derivar as funções de onda do capítulo 8:

No capítulo 10, discute-se a segunda quantização dos estados de Laughlin para o efeito Hall quântico fracionário através da decomposição das funções de onda em bases de Slater de N partículas.

Nos apêndices, registramos com algum detalhe certas passagens dos capítulos.

Capítulo 1

Anomalia na mecânica quântica do ponto

Seja O um operador que na representação de Schrödinger não depende do tempo. Na representação de Heisenberg temos

$$O_H = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) O \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = U^\dagger(t) O U(t), \quad (1.1)$$

onde $U(t) = U(t, t_0 = 0)$ representa o operador evolução temporal entre $t_0 = 0$ e t , com H sendo a hamiltoniana do sistema.

Derivando a eq.(1.1) em relação ao tempo, encontramos

$$\frac{dO_H}{dt} = \frac{iH}{\hbar} O_H - O_H \frac{iH}{\hbar} = \frac{1}{i\hbar} [O_H, H]. \quad (1.2)$$

A eq.(1.2) é chamada de equação de Heisenberg. Os estados na representação de Heisenberg são obtidos daqueles na representação de Schrödinger pela relação

$$\varphi = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) \varphi_H = U \varphi_H, \quad (1.3)$$

onde φ_H não depende do tempo.

Assim na representação de Schrödinger os operadores correspondentes aos observáveis são fixos no tempo, enquanto que os estados variam com o tempo. Em contraste, na representação de Heisenberg os operadores correspondentes aos observáveis variam com o tempo, enquanto que os estados são fixos no tempo.

O valor esperado de um operador O (o valor esperado do operador O em um estado representado pela função de onda φ será denotado por $\langle \varphi | O | \varphi \rangle$) é o mesmo em ambas as

representações

$$\langle \varphi | O | \varphi \rangle = \langle \varphi_H | O_H | \varphi_H \rangle. \quad (1.4)$$

Consideremos doravante que $\hbar = 1$. Seja, agora, a equação de Heisenberg

$$\frac{dO_H}{dt} = i [H, O_H]. \quad (1.5)$$

Tomemos o valor esperado dessa equação em um certo estado φ_H

$$\langle \varphi_H | \frac{dO_H}{dt} | \varphi_H \rangle = i \langle \varphi_H | [H, O_H] | \varphi_H \rangle. \quad (1.6)$$

Seja agora a equação

$$[f(\mathbf{x}), p_{x_i}] = i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \quad (1.7)$$

Da eq. (1.7), segue

$$[f(\mathbf{x}), p_{x_i}^2] = 2i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} p_{x_i} + i \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}. \quad (1.8)$$

Considerando-se $H = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{x})$ e usando as eqs.(1.7) e (1.8) na eq.(1.6), resulta

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi_H | \mathbf{p} | \varphi_H \rangle = - \langle \varphi_H | \nabla V(\mathbf{x}) | \varphi_H \rangle, \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi_H | \mathbf{x} | \varphi_H \rangle = \langle \varphi_H | \frac{\mathbf{p}}{m} | \varphi_H \rangle. \quad (1.10)$$

Conseqüentemente

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \varphi_H | \mathbf{x} | \varphi_H \rangle = \frac{d}{dt} \langle \varphi_H | \mathbf{p} | \varphi_H \rangle = - \langle \varphi_H | \nabla V(\mathbf{x}) | \varphi_H \rangle. \quad (1.11)$$

A eq.(1.11) corresponde à segunda lei de Newton. As eqs.(1.9) e (1.10) constituem o teorema de Ehrenfest. Ehrenfest derivou essas equações utilizando a equação de onda de Schrödinger (e portanto a representação de Schrödinger). Entretanto as eqs.(1.9) e (1.10) valem tanto na representação de Schrödinger como na representação de Heisenberg.

Vamos agora discutir em que condições vale a eq.(1.6). Consideremos um estado $\varphi(\mathbf{x}, t)$ na representação de Schrödinger pertencendo a um espaço de Hilbert D_H tal que H seja um operador hermiteano nesse espaço, ou seja, $H^+ = H$. A evolução temporal do estado $\varphi(\mathbf{x}, t)$ é dada por

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \exp(-iHt) \varphi(\mathbf{x}, 0). \quad (1.12)$$

Consideremos agora um operador O que atua no espaço de Hilbert D_H e que na representação de Schrödinger não depende do tempo t . Então

$$\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{x}, t) = -i H \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (1.13)$$

e também

$$\frac{d}{dt} \varphi^*(\mathbf{x}, t) = i \varphi^*(\mathbf{x}, t) H^+. \quad (1.14)$$

Das eqs.(1.13) e (1.14), concluímos

$$\frac{d}{dt} \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) O \varphi(\mathbf{x}, t) dx = i \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) H^+ O \varphi(\mathbf{x}, t) dx - i \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) O H \varphi(\mathbf{x}, t) dx. \quad (1.15)$$

Para que a eq.(1.6) tenha validade, é necessário que $H^+ = H$ no espaço dos vetores que aparecem na eq.(1.15). Pode acontecer que $O \varphi(\mathbf{x}, t)$ se situe fora do espaço D_H onde H é hermiteano. Nesse caso a eq.(1.6) não vale mais. Reescrevamos, então, a eq.(1.15)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) O \varphi(\mathbf{x}, t) dx &= i \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) [H, O] \varphi(\mathbf{x}, t) dx + \\ &+ i \int \{ \varphi^*(\mathbf{x}, t) H^+ O \varphi(\mathbf{x}, t) - \varphi^*(\mathbf{x}, t) H O \varphi(\mathbf{x}, t) \} dx, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde a eq.(1.16) foi obtida pela soma e subtração do termo $i \int \varphi^*(\mathbf{x}, t) H O \varphi(\mathbf{x}, t) dx$.

Conseqüentemente, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(\mathbf{x}, t) | O | \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = i \langle \varphi(\mathbf{x}, t) | [H, O] | \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle +$$

$$+i (\langle H\varphi(\mathbf{x}, t) | O\varphi(\mathbf{x}, t) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{x}, t) | HO | \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle) = i \langle \varphi(\mathbf{x}, t) | [H, O] | \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle + A. \quad (1.17)$$

Nesse caso, a eq.(1.6) sofreu uma modificação. Ao segundo membro foi acrescentado um termo anômalo. A equação anômala para o operador O ocorre devido ao fato de esse operador não deixar invariante o espaço de Hilbert D_H onde H é hermiteano. Consideremos, agora, um exemplo.

Seja uma partícula movendo-se em uma circunferência de raio um. Sua lagrangeana clássica é

$$L = \frac{m\dot{\theta}^2}{2}. \quad (1.18)$$

A hamiltoniana quântica escreve-se

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\theta^2}. \quad (1.19)$$

Vamos assumir que as autofunções de H sejam periódicas na circunferência

$$\Psi(0) = \Psi(2\pi), \quad \Psi'(0) = \Psi'(2\pi), \quad (1.20)$$

onde Ψ' indica derivada primeira.

Conseqüentemente podemos escrever

$$\Psi_n(\theta) = \exp(in\theta), \quad (1.21)$$

onde n é inteiro ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Observemos que no domínio $D_H = \{\Psi_n(\theta)\}$ o operador H é hermiteano.

Consideremos um estado genérico dado por

$$\varphi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \Psi_n(\theta) \exp(-iE_n t). \quad (1.22)$$

Então podemos encontrar o termo anômalo, a saber (*Apêndice A*)

$$A = -\frac{\pi}{m} \sum_k \sum_n c_k^* c_n (n+k) \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right). \quad (1.23)$$

fato de aparecer a anomalia nesse caso deve-se a circunstância de dada uma função $f(0) = f(2\pi)$, $\theta f(\theta)$ não ser uma função periódica (e se situar fora do domínio D_H das periódicas onde $H^+ = H$).

Observemos que os autovalores de energia para as funções de onda periódicas $\Psi_n(\theta) =$ são dados por

$$E_n = \frac{1}{2m} n^2. \quad (1.24)$$

equação clássica de movimento correspondente à lagrangeana $L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$ é

$$\ddot{\theta} = 0. \quad (1.25)$$

Essa equação clássica de movimento também pode ser obtida a partir da lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 + \frac{q\phi}{2\pi} \dot{\theta}, \quad (1.26)$$

fornece o momento canônico

$$p_\theta = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = m\dot{\theta} + \frac{q\phi}{2\pi}, \quad (1.27)$$

2π é assumido ser constante.

A hamiltoniana correspondente é

$$H = p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2m} \left(p_\theta - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2. \quad (1.28)$$

Se assumirmos condições de contorno periódicas para a função de onda no intervalo as autofunções continuam sendo $\exp(in\theta)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), todavia os níveis de energia agora

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(n - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2. \quad (1.29)$$

A forma de H expressa pela eq.(1.28) permite-nos interpretar o problema agora como de uma partícula de carga q movendo-se em uma circunferência de raio um sob a ação de um campo magnético constante B perpendicular ao plano definido pela órbita da partícula. O

vetor potencial A , relacionado com esse campo magnético, é tangente à circunferência e possui módulo constante dado por $B\phi/2\pi$, onde ϕ denota o fluxo através de uma superfície limitada por essa circunferência.

As quantidades clássicas relevantes são os campos elétrico e magnético e portanto as equações clássicas correspondentes às lagrangeanas

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2, \quad L = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{q\phi}{2\pi} \dot{\theta}$$

são as mesmas. Todavia os espectros de energia correspondentes

$$E_n = \frac{1}{2m} n^2, \quad E_n = \frac{1}{2} \left(n - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2$$

são distintos se $q\phi/2\pi$ não for um número inteiro.

Nesse caso a quantidade relevante é o potencial eletromagnético e não os campos elétrico e magnético. Esse é um aspecto do efeito Aharonov-Bohm.

Os níveis de energia

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(n - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2$$

podem ser interpretados como sendo a metade do quadrado do momento angular l_x , dividido pelo momento de inércia. Os momentos angulares orbitais não assumem mais valores inteiros. Uma vez que $q\phi/2\pi$ pode ser um número real qualquer, esses momentos angulares orbitais podem ter qualquer valor real. Temos, então, anomalias nos valores possíveis de l_x .

O sistema quântico descrito pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\theta - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2$$

também pode ser simulado pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} p_\theta^2,$$

mas com diferentes condições de contorno, ou seja, podemos escrever

$$\frac{1}{2m} \left(p_\theta - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2 \Psi_n(\theta) = E_n \Psi_n(\theta), \tag{1.30}$$

$$\frac{1}{2m} p_\theta^2 \Psi'_n(\theta) = E_n \Psi'_n(\theta), \quad (1.31)$$

onde $\Psi_n(\theta) = \exp(in\theta)$ e $\Psi'_n(\theta) = \exp(i\alpha\theta)$.

Podemos, portanto, calcular o valor de α

$$\frac{1}{2m} p_\theta^2 \exp(i\alpha\theta) = E_n \exp(i\alpha\theta) \implies E_n = \frac{\alpha^2}{2m}. \quad (1.32)$$

Comparemos esse valor de energia com o dado pela eq.(1.29)

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(n - \frac{q\phi}{2\pi} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{2m} \implies \alpha = n - \frac{q\phi}{2\pi}. \quad (1.33)$$

Conseqüentemente

$$\Psi'_n(\theta) = \exp(in\theta) \exp\left(-i \frac{q\phi}{2\pi} \theta\right), \quad (1.34)$$

valendo assim a condição de contorno

$$\Psi'_n(0) = \exp(iq\phi) \Psi'_n(2\pi). \quad (1.35)$$

Para Ψ_n vale a seguinte condição de contorno

$$\Psi_n(0) = \Psi_n(2\pi). \quad (1.36)$$

A condição expressa pela eq.(1.35) define o que denominamos de função *multi-valued* e a condição expressa pela eq.(1.36) define o que denominamos de função *single-valued*.

Seja, então, uma partícula de carga q em uma órbita circular de raio r e uma linha de fluxo magnético ϕ coincidindo com o eixo x_3 . O campo magnético \mathbf{B} é diferente de zero apenas sobre o eixo x_3 , ou seja, $\mathbf{B} = \phi \delta(x_1) \delta(x_2) \mathbf{x}_3$.

O vetor potencial relacionado com esse campo magnético é (*Apêndice B*)

$$\mathbf{A} = \frac{\phi}{2\pi r} \boldsymbol{\theta}, \quad (1.37)$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor unitário na direção do ângulo θ .

Vamos mudar a representação do operador momento canônico e da função de onda, pois assim estaremos ainda preservando as relações de comutação canônicas.

O espaço de Hilbert para esse problema é o conjunto das funções quadraticamente integráveis $F^2(S)$ sobre $S = \{(r, \theta, x_3) | r = b > 0, \theta \in [0, 2\pi], x_3 = 0\}$, onde b é o raio da órbita do elétron.

A representação padrão do operador momento angular canônico $p_\theta = -i \frac{\partial}{\partial \theta}$ pode ser mudada segundo a transformação unitária

$$p'_\theta = \exp(-i\Gamma) p_\theta \exp(i\Gamma) = p_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma. \quad (1.38)$$

A nova função de onda será expressa por

$$\Psi'(\theta) = \exp(-i\Gamma) \Psi(\theta), \quad (1.39)$$

onde Γ é definido sobre S .

O operador momento angular cinético

$$l_{x_3} = p_\theta - qA_\theta, \quad (1.40)$$

(onde $A_\theta = r \theta \cdot A$) é o operador invariante de gauge correspondente à observável momento angular.

Definindo

$$\Gamma = \frac{q\phi}{2\pi} \theta, \quad (1.41)$$

então o operador momento angular cinético é dado por

$$l'_{x_3} = p'_\theta - qA_\theta = p_\theta. \quad (1.42)$$

O novo momento angular cinético é o velho momento angular canônico. O campo magnético e o vetor potencial permaneceram inalterados de tal forma que a eletrodinâmica não é modificada.

A função de onda $\Psi'(\theta)$ satisfaz a equação de Schrödinger do campo livre, mas agora obedecendo à condição de contorno

$$\Psi'(2\pi) = \exp(-iq\phi) \Psi(2\pi) = \exp(-iq\phi) \Psi(0) = \exp(-iq\phi) \Psi'(0). \quad (1.43)$$

A autofunção do novo operador momento angular l'_{x_3} que satisfaz a condição de contorno (eq. 1.43) é

$$\Psi'_n(\theta) = \exp\left(i\left(n - \frac{q\phi}{2\pi}\right)\theta\right), \quad (1.44)$$

onde n é um inteiro.

Assim podemos escrever

$$l'_{x_3} \Psi'_n(\theta) = p_\theta \Psi'_n(\theta) = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \exp\left(i\left(n - \frac{q\phi}{2\pi}\right)\theta\right) = \left(n - \frac{q\phi}{2\pi}\right) \exp\left(i\left(n - \frac{q\phi}{2\pi}\right)\theta\right). \quad (1.45)$$

Conseqüentemente, o autovalor de l_{x_3} é

$$l'_{x_3} = n - \frac{q\phi}{2\pi}, \quad (1.46)$$

onde n é um número inteiro.

Então, concluímos que o momento angular cinético l'_{x_3} é quantizado segundo a eq.(1.46) e da eq.(1.44) depreendemos que

$$\Psi'(\theta + 2\pi) = \exp(-iq\phi)\Psi'(\theta). \quad (1.47)$$

Consideremos, a seguir, a permutação de dois sistemas formados de partícula carregada + fluxo através de uma rotação (fig. 1.1)

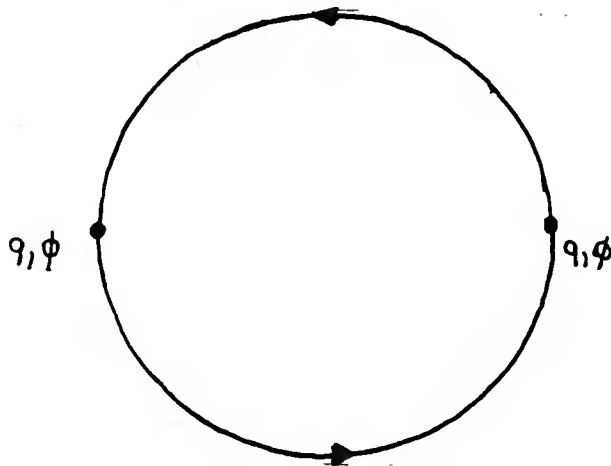


Figura 1.1: Permutação do composto partícula carregada + fluxo.

O resultado dessa permutação é o aparecimento de um fator de fase dado por $\exp(-iq\phi)$.

Se $l'_{x_3} = \text{inteiro} - q\phi/2\pi$ é inteiro, então o fator de fase $\exp(-iq\phi)$ resulta ser o número um e a estatística é normal (por exemplo, se o composto é um fluxo mais elétron, ele obedecerá à estatística de Fermi).

Se $l'_{x_3} = \text{inteiro} - q\phi/2\pi$ é semi-inteiro, então a estatística normal é revertida. Em casos intermediários, o composto não pode ser descrito nem como fermiônico nem como bosônico, mas como aniônico.



Título 2

Efeito Aharonov-Bohm

Consideremos primeiramente um elétron de massa m_e e carga q confinado no interior de uma concha cilíndrica oca, cujo eixo coincide com o eixo x_3 . A função de onda que caracteriza o elétron deve, então, anular-se nas paredes interna e externa de raios $r = \rho_a$ e $r = \rho_b$ e também na base e no topo, ou seja, em $x_3 = 0$ e $x_3 = L$ (fig. 2.1).

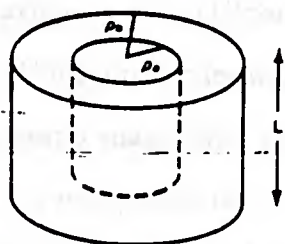


Figura 2.1: Concha cilíndrica oca.

Podemos então encontrar que os autovalores de energia são dados por (Apêndice C)

$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \right), \quad (2.1)$$

$l = 1, 2, 3, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$ e k_{mn} é a n -ésima raiz da equação transcendental

$$J_m(k_{mn}\rho_b) N_m(k_{mn}\rho_a) - N_m(k_{mn}\rho_b) J_m(k_{mn}\rho_a) = 0. \quad (2.2)$$

Vamos agora considerar a concha cilíndrica sendo atravessada em sua região oca por um campo magnético uniforme (fig. 2.2).

Isso pode ser conseguido, colocando-se um solenóide muito longo no centro da região tal forma que nenhum campo magnético atinja a região $r > \rho_a$.

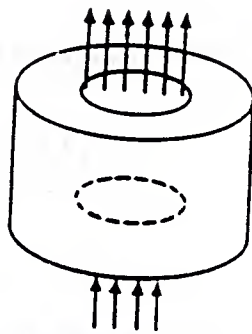


Figura 2.2: Concha cilíndrica oca atravessada por campo magnético uniforme.

As condições de contorno impostas à função de onda são as mesmas condições impostas à função de onda quando não havia o campo magnético; as paredes da concha cilíndrica são novamente consideradas como sendo rígidas.

Intuitivamente, pode-se pensar que o espectro de energia é o mesmo daquele espectro quando não havia campo magnético, uma vez que a região onde o campo magnético é não nulo não pode ser atingida pelo elétron (o qual é encontrado apenas na região entre o raio menor e o raio maior). Contudo, a mecânica quântica nos diz que essa conjectura não é correta.

Se o campo magnético é nulo na região em que o elétron se encontra, o mesmo não acontece com o vetor potencial A .

Usando o teorema de Stokes, pode-se calcular que o vetor potencial necessário para produzir o campo magnético B é

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \implies A = \frac{B\rho_a^2}{2r}. \quad (2.3)$$

Para encontrarmos os autovalores de energia para esse problema, precisamos substituir o gradiente ∇ por

$$\nabla - \left(\frac{iq}{\hbar}\right) \mathbf{A},$$

em coordenadas cilíndricas devemos apenas substituir $\partial/\partial\varphi$ por

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} - \left(\frac{iq}{\hbar}\right) \frac{B\rho_a^2}{2}.$$

temos então encontrar que os autovalores de energia são dados por (Apêndice D)

$$E_{lmn} = \left(\frac{\hbar^2}{2m_e} \right) \left(k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \right), \quad (2.4)$$

a enésima raiz da equação transcendental

$$J_m(k_{mn}\rho_b) N_m(k_{mn}\rho_a) - N_m(k_{mn}\rho_b) J_m(k_{mn}\rho_a) = 0. \quad (2.5)$$

temos que como antes $l = 1, 2, 3, \dots$; contudo m não é mais necessariamente inteiro.

Se m não é mais necessariamente inteiro, há uma mudança no

energia. Isso é muito surpreendente, uma vez que a partícula nunca toca o campo

A força de Lorentz que a partícula experimenta é nula nesse problema e ainda

as níveis de energia dependem do fato de o campo magnético ser ou não nulo na região

da partícula.

Consideremos agora um feixe coerente de elétrons partindo de uma fonte A, sendo

desviado em duas partes (trajetórias 1 e 2) por uma fenda dupla e voltando a se encontrar na

região de interferência C (fig. 2.3).

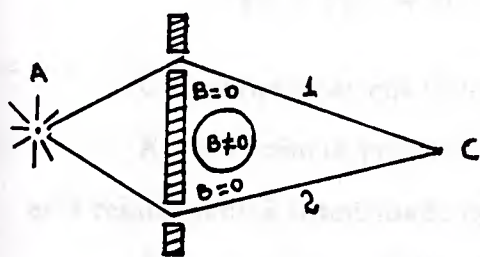


Figura 2.3: Elétron partindo de uma fonte e executando duas trajetórias possíveis.

A equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$\frac{1}{2m_e} (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(x))^2 \Psi(x) = E \Psi(x), \quad (2.6)$$

onde o potencial é assumido ser independente do tempo.

Vamos supor que $\Psi^{(0)}(\mathbf{x})$ satisfaz a equação de Schrödinger quando $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é nulo, ou seja

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi^{(0)}(\mathbf{x}) = E \Psi^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Na região de campo magnético nulo ($\mathbf{B} = 0$), a solução da eq.(2.6) quando $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \neq 0$ pode ser escrita na forma

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi^{(0)}(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{iq}{\hbar} \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}'\right), \quad (2.8)$$

onde a integral de linha é independente do caminho Γ .

A probabilidade de encontrarmos o elétron na região de interferência (se $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \neq 0$) é

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= \left| \Psi_1^{(0)} \exp\left(\frac{qi}{\hbar} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}'\right) + \Psi_2^{(0)} \exp\left(\frac{qi}{\hbar} \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{s}'\right) \right|^2 = \\ &= |\Psi_1^{(0)}|^2 + |\Psi_2^{(0)}|^2 + 2R_e(\bar{\Psi}_1^{(0)}\Psi_2^{(0)}) \cos\left(\frac{q\phi}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde ϕ denota o fluxo magnético.

A probabilidade de encontrarmos o elétron na região de interferência (se $\mathbf{A} = 0$) é

$$|\Psi|^2 = \left| \Psi_1^{(0)} + \Psi_2^{(0)} \right|^2 = |\Psi_1^{(0)}|^2 + |\Psi_2^{(0)}|^2 + 2R_e(\bar{\Psi}_1^{(0)}\Psi_2^{(0)}) \cos(0). \quad (2.10)$$

Comparando as eqs.(2.9),(2.10), notamos que há uma diferença de fase igual a $q\phi/\hbar$.

A interferência pode então ser calculada através do fluxo magnético ϕ , fluxo esse que está relacionado à intensidade do campo magnético \mathbf{B} .

À primeira vista é difícil de descobrir o que poderia haver de errado no seguinte argumento [14]:

“Suponha que tenhamos que multiplicar as amplitudes por um certo fator de fase (digamos $\exp(i\delta)$) quando nós permutamos duas partículas idênticas. Quando nós permutássemos as partículas novamente, deveríamos obter o mesmo fator $\exp(i\delta)$. Mas então nós voltamos ao primeiro caso. O fator de fase tomado duas vezes deve trazer-nos de volta ao ponto em que começamos, ou seja, seu quadrado deve ser igual a 1. Há somente duas possibilidades: $\exp(i\delta)$

ou é igual a -1. Ou o caso permutado contribui com o mesmo sinal, ou contribui com o oposto. Ambos os casos existem na natureza, cada qual representando uma diferente classe de partículas. Partículas as quais interferem com um sinal positivo são chamadas Bósons e aquelas que interferem com um sinal negativo são chamadas Férmions.”

O argumento de Feynman parece mostrar que as amplitudes da mecânica quântica (ou teoria de onda) para duas partículas idênticas deve necessariamente ser par ou ímpar quando trocamos as duas partículas, e que essas duas possibilidades são preenchidas pelos dois tipos conhecidos de partículas idênticas realmente encontradas na natureza, a saber: bósons e férmions.

Contudo, há circunstâncias físicas concebíveis em que a afirmação acima não é necessariamente verdadeira, como por exemplo, no caso de partículas idênticas forçadas a se moverem em uma única dimensão espacial e com a condição de que nenhuma das duas partículas pode ocupar a mesma posição no espaço (isto é, elas são impenetráveis, ou em termos físicos, há forças repulsivas de curto alcance entre as partículas). Nesse caso, está longe de haver apenas dois valores para a amplitude quântica assumir quando nós permutamos duas partículas idênticas ($\exp(i\delta) = 1$ ou $\exp(i\delta) = -1$), na verdade há realmente infinitas possibilidades. A amplitude quântica pode mudar por um fator de fase $\exp(i\delta)$ o qual pode assumir qualquer valor, e genericamente o nome ânion, que origina-se de *anyon* (qualquer) para descrever genericamente tais partículas idênticas.

Agora tentemos imaginar um sistema físico que se comporte como um ânion. Tudo que precisamos é criar uma situação na qual o efeito de uma partícula circundar a outra é multiplicado por um fator de fase $\exp(i\delta)$. Mas isso é exatamente o que acontece quando uma partícula se move em torno de uma linha de fluxo. Se a carga é q e o fluxo é ϕ , uma volta completa da partícula em torno da linha produz uma fase (efeito Aharonov-Bohm) de valor $2\pi q\phi$.

Aqui, uma das “partículas” é o ponto onde a linha de fluxo fura o plano e a outra é a partícula carregada. Mas isso é obviamente não simétrico; o que nós precisamos é atribuir tanto uma carga quanto uma linha de fluxo à coordenada de cada partícula. O modelo de Wilczek de um

ânion é o de uma partícula carregando tanto carga como fluxo, isto é, um composto carga-fluxo tal que $q\phi/\hbar = \delta$.

Consideremos um tal composto e imaginemos a carga levemente deslocada da linha de fluxo, e com o fluxo tendo inicialmente o valor zero (fig. 2.4).

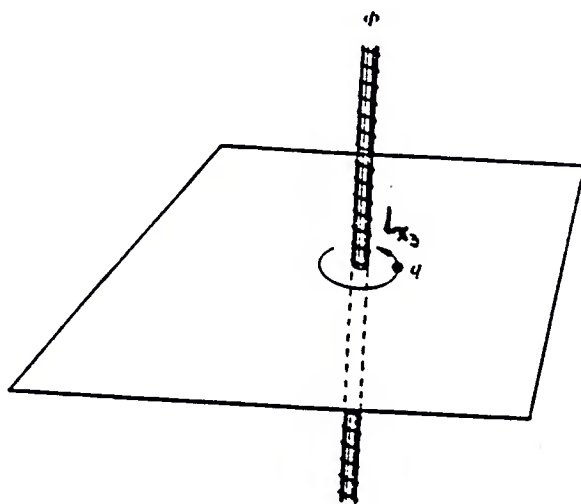


Figura 2.4: Composto carga-fluxo.

Agora vagarosamente aumentemos o fluxo fazendo passar corrente através de um fino solenóide. Pela Lei de Faraday, a partícula carregada “sentirá” um campo elétrico tangencial tendendo a fazê-la circundar em torno da linha de fluxo, de tal forma que ela adquirirá um momento angular l_{x_3} em relação à linha de fluxo, a qual nós consideraremos estar ao longo do eixo x_3 . Quando o valor final de ϕ é atingido, o momento angular total da partícula é $q\phi/2\pi$. Mas isso é precisamente $\delta\hbar/2\pi$, onde δ é a fase adquirida quando nós permutamos dois de tais compostos. Assim, se a fase adquirida na permuta é π , o momento angular adquirido em um tal composto é $\hbar/2$, tal como seria para um férmion; do mesmo modo se $\delta = 0, 2\pi, \dots$, o momento angular adquirido é um inteiro vezes \hbar . Isso é o que diz a conexão “spin-estatística”: o spin de uma única partícula e a fase adquirida na permuta de duas de tais partículas estão

mente inter-relacionadas. Essa relação é generalizada para o caso de δ arbitrário

$$\delta = \frac{q\phi}{\hbar}, \quad l_{x_3} = \frac{q\phi}{2\pi} = \frac{\hbar\delta}{2\pi}. \quad (2.11)$$

A grande novidade surge do fato de que l_{x_3} é agora qualquer, não mais necessariamente uma das formas: inteiro vezes \hbar ou (inteiro + 1/2) vezes \hbar .

Capítulo 3

Um elétron planar no campo magnético constante, externo e perpendicular - níveis de Landau

Consideremos uma carga q sujeita a um campo magnético uniforme B na direção do eixo x_3 . A força que age sobre essa carga é a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{H}} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Seja agora a equação

$$\mathbf{\Pi} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}, \quad (3.2)$$

onde E representa a energia da partícula que é dada por

$$E = \frac{mc^2}{[1 - (\frac{v}{c})^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.3)$$

Reescrevendo a equação (3.1)

$$\frac{E\dot{\mathbf{v}}}{c} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Logo as soluções das equações de movimento são (*Apêndice E*)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + r \sin(\omega t + \alpha), \\ x_2 &= x_{20} + r \cos(\omega t + \alpha), \\ x_3 &= x_{30} + v_{30}t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

na fase inicial, $v_0 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2}$ é a velocidade da partícula no plano x_1x_2 (a qual é uma constante), $r = v_0/\omega$ e $\omega = qcB/E$. Essas duas constantes (α e v_0) são determinadas a partir das condições iniciais.

Analisando as eqs.(3.5), nota-se que a carga se move num campo magnético uniforme, descrevendo uma helicoidal, cujo eixo está orientado ao longo do campo magnético e cujo raio é determinado pelo caso a velocidade da partícula é constante. No caso particular, quando v_{30} é nula, isto é, quando a carga não tem velocidade ao longo do campo, ela se move segundo uma circunferência no plano perpendicular à direção do campo.

A grandeza ω , como se deduz das fórmulas, é a frequência cíclica de rotação da partícula no plano perpendicular ao campo.

Caso a velocidade da partícula seja pequena, podemos expandir a energia E . Logo se

$$E = mc^2, \quad (3.6)$$

Dessa forma

$$\omega = qcB/E = qcB/mc^2 = qB/mc. \quad (3.7)$$

Podemos expressar o campo magnético em função do vetor potencial

$$B = \varepsilon_{ij} \partial_{x_i} A_{x_j}; \quad i, j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Essa equação tem a solução

$$A_{x_i} = -\frac{B}{2} \varepsilon_{ij} x_j - \partial_{x_i} \phi, \quad (3.9)$$

onde ϕ é uma função arbitrária de x_i .

Mas se observarmos a equação de movimento (3.1), notaremos que o vetor potencial não aparece explicitamente. A um mesmo campo, então, podem corresponder diferentes potenciais, o que pode ser compreendido da transformação

$$A' = A + \nabla f, \quad (3.10)$$

onde f é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo.

Segue então que

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (3.11)$$

Do eletromagnetismo, sabemos que a expressão que relaciona o momento canônico com o momento mecânico é

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Pi} + \frac{q}{c} \mathbf{A}. \quad (3.12)$$

Uma vez que estaremos considerando $v \ll c$, podemos escrever

$$\mathbf{\Pi} = m\mathbf{v}. \quad (3.13)$$

A hamiltoniana tomará a forma

$$H = \frac{m}{2} v^2 = (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^2 / 2m = \frac{m}{2} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) + \frac{m}{2} v_{x_3}^2. \quad (3.14)$$

É importante ressaltar que H é igual a energia cinética da partícula. Essa energia é constante porque a força de Lorentz que atua sobre a partícula é sempre perpendicular a \mathbf{v} e portanto não realiza trabalho durante o movimento.

O gauge simétrico é definido fazendo $\phi = 0$ na eq.(3.9)

$$A_{x_i} = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} x_j. \quad (3.15)$$

Considerando o campo magnético $\mathbf{B} = (0,0,B)$, pode-se verificar que a componente x_3 do momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ nesse gauge simétrico é constante e igual a

$$L_{x_3} = \frac{qB}{2c} (x_{10}^2 + x_{20}^2 - \frac{2}{m\omega^2} H_{x_1 x_2}), \quad (3.16)$$

onde

$$H_{x_1 x_2} = \frac{m}{2} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2). \quad (3.17)$$

O gauge de Landau é definido fazendo $\phi = \frac{B}{2} x_1 x_2$ na eq. (3.9)

$$A_{x_i} = -\frac{B}{2}(\varepsilon_{ij}x_j + \partial_{x_i}(x_1x_2)). \quad (3.18)$$

Por exemplo, no gauge de Landau

$$p_{x_1} = \Pi_{x_1} + \frac{q}{c} A_{x_1} \quad (3.19)$$

constante de movimento.

A grandeza

$$J = -\frac{1}{2m\omega} (\Pi_{x_1}^2 + \Pi_{x_2}^2 - \beta_{x_1}^2 - \beta_{x_2}^2) \quad (3.20)$$

constante de movimento independentemente do gauge escolhido.

As grandezas β_{x_1} e β_{x_2} estão relacionadas com as coordenadas do centro da órbita no plano x_1x_2 (perpendicular ao campo $\mathbf{B} = B\mathbf{x}_3$).

Utilizando as eqs.(3.5), segue

$$x_1 = x_{10} - \frac{v_{x_2}}{\omega} \implies m\omega x_{10} = \Pi_{x_2} + m\omega x_1 = \beta_{x_2},$$

$$x_2 = x_{20} + \frac{v_{x_1}}{\omega} \implies -m\omega x_{20} = \Pi_{x_1} - m\omega x_2 = \beta_{x_1}. \quad (3.21)$$

Em forma mais compacta podemos escrever

$$\beta_{x_i} = \Pi_{x_i} - m\omega\varepsilon_{ij}x_j. \quad (3.22)$$

As quantidades β_{x_1} e β_{x_2} também são constantes de movimento independentemente do gauge escolhido.

A expressão clássica da hamiltoniana é representada pela eq.(3.14). A expressão quântica da hamiltoniana é obtida a partir da eq.(3.14) substituindo \mathbf{p} pelo operador quântico $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ e o potencial vetor clássico \mathbf{A} é substituído por uma função dos operadores coordenadas.

Fixemos nossa atenção ao movimento que ocorre no plano x_1x_2 . Classicamente, vimos que as quantidades β_{x_1} e β_{x_2} (quantidades relacionadas com as coordenadas do centro da órbita

circular da partícula) são constantes de movimento e que o momento angular representado pela eq.(3.20) também é uma constante de movimento.

Quanticamente, os operadores que representam essas mesmas grandezas também são constantes de movimento. Essa afirmação é consequência da equação de Heisenberg.

A seguir, resumimos os comutadores quânticos que definem a estrutura das autofunções e autovalores de $H_{x_1x_2}$

$$\begin{aligned} [\Pi_{x_i}, \Pi_{x_j}] &= i \hbar^2 \lambda^{-2} \varepsilon_{ij}, \\ [\beta_{x_i}, \beta_{x_j}] &= -i \hbar^2 \lambda^{-2} \varepsilon_{ij}, \\ [\Pi_{x_i}, \beta_{x_j}] &= 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $i, j = 1, 2$ e

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}} \tag{3.24}$$

é chamado de comprimento magnético, e essencialmente é o raio da órbita clássica de uma partícula em um campo magnético com energia cinética de valor $\hbar\omega/2$.

Construamos os seguintes operadores *step*

$$\begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\hbar} (\Pi_{x_1} \pm i \Pi_{x_2}), \tag{3.25}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ b^+ \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\hbar} (\beta_{x_2} \pm i \beta_{x_1}), \tag{3.26}$$

onde $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$.

Conseqüentemente

$$H_{x_1x_2} = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \tag{3.27}$$

e a energia correspondente é

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad n \in Z_+. \tag{3.28}$$

estado caracterizado por um valor específico da energia cinética é denominado de nível de Landau.

Classicamente, a órbita circular de uma partícula carregada em um campo magnético é determinada completamente através da análise da energia cinética. Esse fato torna-se claro se examinarmos as eqs.(3.21), de onde notamos que para uma dada energia cinética, o centro da órbita (x_{10}, x_{20}) é arbitrário. Logo é natural esperarmos que, quanticamente, existam estados possíveis para uma das energias cinéticas permitidas correspondentes aos centros. Em outras palavras, é lícito esperarmos que as energias cinéticas permitidas sejam degeneradas infinitamente (quando considerarmos o plano todo, pois quando nos ocupamos apenas uma porção finita do plano, temos uma degenerescência finita).

Matematicamente, a degenerescência dos níveis de Landau é conseqüência (essencialmente) do fato de as quantidades β_{x_1} e β_{x_2} (referentes às coordenadas do centro da órbita) não serem constantes. Esse é um caso particular do teorema da mecânica quântica (se $[A, B] = 0, [A, C] = 0, [B, C] \neq 0$, então os autovalores de A são degenerados).

As três constantes de movimento (no plano x_1x_2) são J, β_{x_1} e β_{x_2} . A fim de se estudar o sistema, precisamos diagonalizar além da hamiltoniana $H_{x_1x_2}$ (que evidentemente é uma constante de movimento), uma das três quantidades acima, digamos a quantidade β_{x_1} . Então, as outras duas constantes de movimento (β_{x_1} e β_{x_2}) conectarão diferentes estados com a mesma energia, isto é, atuarão dentro de um determinado nível de Landau.

De acordo com o teorema citado, temos

$$[H_{x_1x_2}, J] = 0, \quad [H_{x_1x_2}, \beta_{x_i}] = 0, \quad [J, \beta_{x_i}] \neq 0. \quad (3.29)$$

Em resumo, os operadores a, a^+ mudam a energia cinética; com eles podemos construir estados com diferentes energias cinéticas e são chamados de operadores interníveis de Landau, enquanto que b, b^+ permitem-nos construir todos os estados com a mesma energia cinética, ou seja, são limitados ao subespaço de um determinado nível de Landau, e são chamados de operadores intraníveis de Landau.

Capítulo 4

Realização bosônica e fermiônica de álgebras quânticas

A álgebra $SU(2)$ pode ser formada de várias maneiras. Uma possibilidade é a construção de Schwinger. Seja um par de osciladores harmônicos bosônicos tais que

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{4.1}$$

Para $i, j = 1, 2$, os três geradores de $SU(2)$

$$j^+ = a_1^\dagger a_2, \tag{4.2}$$

$$j^0 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \tag{4.3}$$

$$j^- = a_2^\dagger a_1 \tag{4.4}$$

são bilineares em a e a^\dagger .

Usando a eq.(4.1), conseguimos

$$[j^+, j^-] = 2j^0, \tag{4.5}$$

$$[j^0, j^\pm] = \pm j^\pm. \tag{4.6}$$

É interessante assinalar que usando um único par de osciladores bosônicos, conseguimos construir a álgebra $SU(2)$ bem como o conjunto completo de suas representações unitárias. Para

nesse fato, vamos definir os estados normalizados

$$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (a_1^+)^{j+m} (a_2^+)^{j-m} |0\rangle, \quad (4.7)$$

são inteiros ou semi-inteiros arbitrários tais que $j \pm m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, e o estado $|0\rangle$ é tal que

$$a_i |0\rangle = 0, \quad (4.8)$$

2. Usando a eq.(4.1), verificamos que

$$\begin{aligned} j^0 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\ j^\pm |j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Os estados $|j, m\rangle$ são os familiares estados de momento angular nos quais j rotula o spin e m é a terceira componente. Desde que j pode assumir valores inteiros ou semi-inteiros e m é arbitrário, todas as possíveis representações unitárias de $SU(2)$ são geradas pelos estados representados pela eq.(4.7) cujos geradores correspondentes são simplesmente dados pelas eqs. (4.2), (4.3), (4.4).

A construção de Schwinger de $SU(2)$ tem sido generalizada pelo emprego dos osciladores- q que são deformações dos osciladores harmônicos ordinários e são caracterizados pelas comutação generalizadas

$$a_i a_i^+ - q^{-1} a_i^+ a_i = q^{N_i}, \quad (4.10)$$

onde q é o parâmetro da deformação e N_i é o operador número. Notemos que N_i não comuta com a_i^+ , contudo satisfaz as relações

$$[N_i, a_i^+] = a_i^+, \quad (4.11)$$

$$[N_i, a_i] = -a_i. \quad (4.12)$$

Definindo agora os geradores

$$J^+ = a_1^+ a_2, \quad (4.13)$$

$$J^- = a_2^+ a_1, \quad (4.14)$$

$$J^0 = \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \quad (4.15)$$

encontramos (por exemplo, a eq.(4.17) é verificada no *Apêndice F*)

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad (4.16)$$

$$[J^+, J^-] = \frac{q^{2J^0} - q^{-2J^0}}{q - q^{-1}}. \quad (4.17)$$

Esses são os comutadores do grupo quântico $SU(2)_q$ e conseqüentemente podemos dizer que a construção de Schwinger para os osciladores- q naturalmente conduz ao grupo quântico onde q é o parâmetro de deformação. Observemos também que no limite de $q \rightarrow 1$ recuperamos a álgebra bosônica padrão.

A construção de Schwinger pode ser efetuada também usando-se férmions ao invés de bósons. De fato, consideremos um par de osciladores fermiônicos obedecendo à relação de anticomutação

$$\{c_i, c_j^+\} = \delta_{ij}, \quad (4.18)$$

onde $i, j = 1, 2$. Definamos, então, os geradores de $SU(2)$

$$j^+ = c_1^+ c_2, \quad (4.19)$$

$$j^0 = \frac{1}{2}(c_1^+ c_1 - c_2^+ c_2), \quad (4.20)$$

$$j^- = c_2^+ c_1. \quad (4.21)$$

É importante ressaltar que, em contraste com o caso bosônico, é agora impossível recuperar todo o conjunto completo de representações unitárias de $SU(2)$. De fato, denotando por

fermiônico ($c_i|0\rangle = 0$ para $i = 1,2$), podemos construir somente os seguintes quatro

$$|0\rangle, \quad c_1^+|0\rangle, \quad c_2^+|0\rangle, \quad c_1^+c_2^+|0\rangle, \quad (4.22)$$

que as relações de anticomutação proíbem-nos de colocarmos mais de um férmion de cada tipo e assim só conseguimos as representações para $j = 0$ e $j = \frac{1}{2}$. Para contornar este problema, devemos considerar muitas cópias de pares de osciladores fermiônicos, ou mais precisamente, devemos considerar um campo espinorial de Pauli de duas componentes

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

que pertence a alguma variedade Ω (podemos pensar que x é o rótulo que faz distinção entre as diferentes cópias dos osciladores fermiônicos). O adjunto de $c(x)$ é dado por

$$c^+(x) = (c_1^+(x), c_2^+(x)), \quad (4.24)$$

onde c_1^+ pode ser interpretado como o operador que cria um férmion do tipo 1 (spin para cima) no ponto $x \in \Omega$, e c_2^+ como o operador que cria um férmion do tipo 2 (spin para baixo) no ponto $x \in \Omega$. Além disso nós assumimos a relação de anticomutação padrão

$$\{c_i(x), c_j^+(y)\} = \delta_{ij} \delta(x,y), \quad (4.25)$$

onde $\delta(x,y)$ é a função delta em Ω . Definamos então os operadores locais

$$j^+(x) = c_1^+(x)c_2(x), \quad (4.26)$$

$$j^0(x) = \frac{1}{2} (c_1^+(x)c_1(x) - c_2^+(x)c_2(x)), \quad (4.27)$$

$$j^-(x) = c_2^+(x)c_1(x), \quad (4.28)$$

que obedecem às relações de comutação

$$[j^+(x), j^-(y)] = 2j^0(x) \delta(x,y), \quad (4.29)$$

$$[j^0(x), j^\pm(y)] = \pm j^\pm(x) \delta(x, y). \quad (4.30)$$

As eq.(4.29) e (4.30) indicam que uma álgebra local $SU(2)$ é construída em cada ponto de Ω . Obviamente essas álgebras locais têm somente as representações de spin 0 e $\frac{1}{2}$, as quais podem ser chamadas de representações locais. Poderíamos também, nesse ponto, introduzir os operadores $j^+(x), j^-(x), j^0(x)$ expressos em termos de operadores bosônicos que satisfazem a eq.(4.1).

Uma álgebra global pode ser construída combinando álgebras locais com um uso repetido de comultiplicação. Dessa forma, os operadores

$$J^\pm \equiv \sum_x J^\pm(x) = \sum_x 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes j^\pm(x) \otimes 1 \otimes \dots 1, \quad (4.31)$$

$$J^0 \equiv \sum_x J^0(x) = \sum_x 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes j^0(x) \otimes 1 \otimes \dots 1 \quad (4.32)$$

geram uma álgebra global $SU(2)$. O símbolo \otimes nas eq.(4.31) e (4.32) denota o produto direto de tal maneira que os operadores $J^\pm(x)$ e $J^0(x)$ atuam como o operador identidade em todos os pontos diferentes de x e atuam como $j^\pm(x)$ e $j^0(x)$ respectivamente em x . Portanto, combinando as representações locais de spin 0 e spin $\frac{1}{2}$, é possível construir todas as representações unitárias da álgebra global $SU(2)$. Por exemplo, a representação de spin 1 é realizada através do espaço gerado pelos três estados seguintes

$$c_1^+(x_1)c_1^+(x_2)|0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1^+(x_1)c_2^+(x_2) + c_2^+(x_1)c_1^+(x_2)) |0\rangle, \quad c_2^+(x_1)c_2^+(x_2)|0\rangle, \quad (4.33)$$

onde x_1 e x_2 são dois pontos distintos e arbitrários em Ω . Todas as outras representações podem ser realizadas de maneira similar.

É valioso mencionarmos que a construção de Schwinger de $SU(2)$ pode ser generalizada também de uma maneira diferente usando-se osciladores fermiônicos junto com uma comultiplicação não cocomutativa. Para isso ser possível, é necessário ordenarmos os férmions, por exemplo, colocando-os em uma linha. Assim podemos definir os seguintes geradores

$$J^\pm(x) = \prod_{y < x} q^{-j^0(y)} j^\pm(x) \prod_{z > x} q^{j^0(z)}, \quad (4.34)$$

$$J^0(x) = j^0(x), \quad (4.35)$$

x e $j^0(x)$ são dados pelas eqs.(4.26),(4.27),(4.28); x é a coordenada de uma cadeia unidimensional e q é um número complexo arbitrário.

Das equações (4.29),(4.30),(4.34),(4.35) seguem

$$[J^0(x), J^\pm(y)] = \pm J^\pm(x) \delta(x, y), \quad (4.36)$$

$$[J^+(x), J^-(y)] = 0 \text{ se } x \neq y, \quad (4.37)$$

$$[J^+(x), J^-(x)] = \prod_{y < x} q^{-2J^0(y)} 2J^0(x) \prod_{z > x} q^{2J^0(z)}. \quad (4.38)$$

Nota-se que os operadores globais

$$J^\pm = \sum_x J^\pm(x), \quad (4.39)$$

$$J^0 = \sum_x J^0(x) \quad (4.40)$$

satisfazem (por exemplo, a eq.(4.42) é verificada no Apêndice F)

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad (4.41)$$

$$[J^+, J^-] = \frac{q^{2J^0} - q^{-2J^0}}{q - q^{-1}}. \quad (4.42)$$

Constatamos assim que essas são novamente as relações de comutação de $SU(2)_q$.

Capítulo 5

A construção de Schwinger para operadores não locais - operadores aniônicos

Dando continuidade ao assunto descrito no capítulo anterior, vamos definir os operadores não locais $\alpha_i(x)$ e $\alpha_i^+(x)$ por

$$\alpha_i(x) = q^{-\Delta_i(x)} c_i(x), \quad (5.1)$$

$$\alpha_i^+(x) = c_i^+(x) q^{\Delta_i(x)}, \quad (5.2)$$

onde $i = 1, 2$ e $c_i(x)$ e $c_i^+(x)$ são os operadores fermiônicos que satisfazem a eq.(4.25). Temos também que

$$\Delta_i(x) = \sum_y f(x, y) N_i(y), \quad (5.3)$$

$$N_i(y) = c_i^+(y) c_i(y), \quad (5.4)$$

sendo que x e y pertencem a algum conjunto discreto Ω e $f(x, y)$ é uma função arbitrária a ser especificada logo a seguir. Tal construção dos operadores pode ser entendida como um tipo de transformação Jordan-Wigner dos operadores fermiônicos, isto é, associamos aos férmions $c_i(x)$ os operadores desordem $q^{-\Delta_i(x)}$.

Usando as eqs.(5.3),(5.4) e (4.25), conseguimos

$$[\Delta_i(x), c_j(y)] = -\delta_{ij} f(x, y) c_i(y), \quad (5.5)$$

$$[\Delta_i(x), c_j^\dagger(y)] = \delta_{ij} f(x, y) c_i^\dagger(y), \quad (5.6)$$

$$[\Delta_i(x), N_j(y)] = 0. \quad (5.7)$$

através do uso das eqs.(5.5),(5.6),(5.7),(4.25), conseguimos as relações de comutação dos operadores $\alpha_i(x)$ e $\alpha_i^\dagger(x)$. Ela (a eq.(5.8), por exemplo, é verificada no Apêndice G)

$$\alpha_i(x) \alpha_i^\dagger(y) + q^{f(y,x)-f(x,y)} \alpha_i^\dagger(y) \alpha_i(x) = \delta(x, y), \quad (5.8)$$

$$\alpha_i(x) \alpha_i(y) + q^{f(x,y)-f(y,x)} \alpha_i(y) \alpha_i(x) = 0. \quad (5.9)$$

Notemos que quando $x = y$, resulta

$$\{\alpha_i(x), \alpha_i^\dagger(x)\} = 1, \quad (5.10)$$

$$\alpha_i^2(x) = 0. \quad (5.11)$$

Assim, nota-se que os operadores $\alpha_i, \alpha_i^\dagger$ descrevem objetos de núcleo duro os quais obedecem às relações de anticomutação fermiônicas no mesmo ponto. Como um caso particular, os operadores $\alpha_i, \alpha_i^\dagger$ podem ser identificados como operadores aniônicos. De fato, os operadores podem ser obtidos das eqs. (5.1),(5.2) tomando-se $q = \exp(i\nu\pi)$ e $f(x, y) = \frac{-1}{\pi} \theta(x, y)$, onde ν é o parâmetro determinante da estatística e $\theta(x, y)$ é a função ângulo da rede [15].

O nosso objetivo agora é encontrar uma classe geral de funções $f(x, y)$ de maneira que a representação de Schwinger pode ser conseguida usando-se os operadores das eqs. (5.1),(5.2). Os operadores $\alpha_i(x)$ e $\alpha_i^\dagger(x)$ por si só não são suficientes para formar os geradores locais. Para fim de construí-los, introduzimos um par extra de operadores $\tilde{\alpha}_i(x)$ e $\tilde{\alpha}_i^\dagger(x)$ ($i = 1, 2$)

$$\tilde{\alpha}_i(x) = q^{\tilde{\Delta}_i(x)} c_i(x), \quad (5.12)$$

$$\tilde{\alpha}_i^\dagger(x) = c_i^\dagger(x) q^{-\tilde{\Delta}_i(x)}, \quad (5.13)$$

onde $\tilde{\Delta}_i(x) = \sum_y g(x,y)N_i(y)$ e $g(x,y)$ é uma função a ser especificada a seguir.

As relações de comutação entre os operadores descritos pelas eqs.(5.12),(5.13) são obtidas das eqs.(5.8),(5.9),(5.10),(5.11) pela substituição de q por q^{-1} e $f(x,y)$ por $g(x,y)$.

As relações de comutação entre os operadores descritos pelas eqs.(5.1),(5.2),(5.12),(5.13) são dadas por

$$\alpha_i(x)\tilde{\alpha}_i^+(y) + q^{-(f(x,y)+g(x,y))} \tilde{\alpha}_i^+(y)\alpha_i(x) = q^{(\Delta_i(x)+\tilde{\Delta}_i(x))} \delta(x,y), \quad (5.14)$$

$$\alpha_i(x)\tilde{\alpha}_i(y) + q^{f(x,y)+g(y,x)} \tilde{\alpha}_i(y)\alpha_i(x) = 0. \quad (5.15)$$

Vamos agora definir os operadores

$$J_\alpha^+(x) = \tilde{\alpha}_1^+(x)\alpha_2(x), \quad (5.16)$$

$$J_\alpha^-(x) = \tilde{\alpha}_2^+(x)\tilde{\alpha}_1(x), \quad (5.17)$$

$$J_\alpha^0(x) = \frac{1}{2} (\alpha_1^+(x)\alpha_1(x) - \alpha_2^+(x)\alpha_2(x)) = \frac{1}{2} (\tilde{\alpha}_1^+(x)\tilde{\alpha}_1(x) - \tilde{\alpha}_2^+(x)\tilde{\alpha}_2(x)). \quad (5.18)$$

Das eqs.(5.1),(5.2),(5.12),(5.13) seguem

$$J_\alpha^0(x) = j^0(x) = \frac{1}{2} (N_1(x) - N_2(x)), \quad (5.19)$$

$$J_\alpha^+(x) = q^{-f(x,x)+2} \sum_y f(x,y)j^0(y) j^+(x), \quad (5.20)$$

$$J_\alpha^-(x) = q^{g(x,x)+2} \sum_y g(x,y)j^0(y) j^-(x). \quad (5.21)$$

As eqs.(5.20) e (5.21) podem ser escritas em uma forma mais conveniente, a saber

$$J_\alpha^+(x) = q^{(2j^0(x)-1)f(x,x)} \prod_{y<x} q^{2f(x,y)j^0(y)} j^+(x) \prod_{z>x} q^{2f(x,z)j^0(z)}, \quad (5.22)$$

$$J_\alpha^-(x) = q^{(2j^0(x)+1)g(x,x)} \prod_{y<x} q^{2g(x,y)j^0(y)} j^-(x) \prod_{z>x} q^{2g(x,z)j^0(z)}. \quad (5.23)$$

Comparando-se as eqs.(4.34),(4.35) com as eqs.(5.19),(5.22),(5.23), notamos que se

$$f(x, y) = g(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & , \text{ se } y < x \\ 0 & , \text{ se } y = x \\ \frac{1}{2} & , \text{ se } y > x, \end{cases} \quad (5.24)$$

então $J_{\alpha}^{\pm}(x) = J^{\pm}(x)$, $J_{\alpha}^0(x) = J^0(x)$ e conseqüentemente os geradores globais definidos segundo

$$J_{\alpha}^{\pm} = \sum_x J_{\alpha}^{\pm}(x), \quad (5.25)$$

$$J_{\alpha}^0 = \sum_x J_{\alpha}^0(x) \quad (5.26)$$

satisfazem a álgebra $SU(2)_q$.

É óbvio que para qualquer função $f'(x, y) = a f(x, y) = a g(x, y)$, onde a é uma constante real, os operadores descritos pelas eqs.(5.25),(5.26) irão satisfazer a álgebra $SU(2)_{q'}$ com $q' = q^a$.

É importante considerarmos também que a escolha das funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ na eq.(5.24) é única a fim de conseguirmos os geradores descritos pelas eqs.(4.34),(4.35) e que caracterizam a álgebra $SU(2)_q$. Em outras palavras, existe somente um par de operadores $\alpha_i(x), \alpha_i^+(x)$ e um par de operadores $\tilde{\alpha}_i(x), \tilde{\alpha}_i^+(x)$, com $f(x, y)$ e $g(x, y)$ dados pela eq.(5.24) de tal forma que a construção de Schwinger pode ser empregada para construir os geradores descritos pelas eqs.(4.34),(4.35) e que caracterizam a álgebra $SU(2)_q$.

Por outro lado, como veremos a seguir, existe uma classe mais geral de funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ tais que os operadores locais descritos pelas eqs.(5.19), (5.20),(5.21) satisfaçam as eqs.(4.36),(4.37),(4.38) e em conseqüência os operadores globais descritos pelas eqs.(5.25),(5.26) satisfaçam a álgebra $SU(2)_q$.

Usando-se às eqs.(4.29),(4.30) nas eqs.(5.19),(5.20),(5.21), conseguimos

$$[J_{\alpha}^0(x), J_{\alpha}^{\pm}(y)] = \pm J_{\alpha}^{\pm}(x)\delta(x, y), \quad (5.27)$$

$$J_{\alpha}^+(x)J_{\alpha}^-(y) - q^{-2(f(x,y)+g(y,x))}J_{\alpha}^-(y)J_{\alpha}^+(x) =$$

$$= q^{-(f(x,x)+g(x,x))+2 \sum_z (f(x,z)+g(x,z)) J_\alpha^0(z)} 2J_\alpha^0(x) \delta(x, y). \quad (5.28)$$

Assumindo que para $\forall x, y \in \Omega$ nós tenhamos

$$f(x, y) = -g(y, x), \quad (5.29)$$

então da eq.(5.28) é imediato que

$$[J_\alpha^+(x), J_\alpha^-(y)] = 0; \forall x \neq y, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} [J_\alpha^+(x), J_\alpha^-(x)] &= q^2 \sum_z (f(x,z) - f(z,x)) J_\alpha^0(z) 2J_\alpha^0(x) = \\ &= \prod_{y < x} q^{2(f(x,y) - f(y,x)) J_\alpha^0(y)} 2J_\alpha^0(x) \prod_{z > x} q^{2(f(x,z) - f(z,x)) J_\alpha^0(z)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Agora se definirmos $f(x, y)$ segundo

$$f(x, y) - f(y, x) = \begin{cases} -\beta & , \text{para } y < x \\ 0 & , \text{para } y = x \\ \beta & , \text{para } y > x, \end{cases} \quad (5.32)$$

onde β é uma constante real e fizermos $q' = q^\beta$, então a eq.(5.31) tem a mesma forma que a eq.(4.38)((4.38) é uma das equações satisfeitas pelos geradores locais que formam a álgebra $SU(2)_q$).

Portanto, qualquer função $f(x, y)$ que satisfaça a eq.(5.32) (a qual restringe apenas a parte anti-simétrica de f) fornece aceitáveis operadores não locais.

Conseqüentemente, das eqs.(5.27),(5.30),(5.31), nós finalmente concluímos que os geradores globais descritos pelas eqs.(5.25),(5.26) satisfazem a álgebra $SU(2)_{q'}$, ou seja, satisfazem a álgebra descrita pelas eqs.(4.41),(4.42).

Assim nós temos encontrado uma classe de operadores não locais descritos pelas eqs.(5.1), (5.2),(5.12),(5.13) que geram a álgebra $SU(2)_q$ através da construção de Schwinger. Recordemos

que se considerarmos $q = \exp(i\nu\pi)$ e $f(x, y) = \frac{-1}{\pi}\theta(x, y)$ (onde ν é o parâmetro determinante da estatística e $\theta(x, y)$ é a função ângulo da rede), então esses operadores não locais podem ser identificados como sendo os próprios operadores aniônicos [15].

Capítulo 6

Conceitos básicos da álgebra W infinito e os níveis de Landau focalizados sob o prisma do grupo $SU(2)_q$

Consideremos um simples deslocamento infinitesimal na variável x

$$x \rightarrow x' = x + \epsilon = \left(1 + \epsilon \frac{d}{dx}\right) x = \exp(i\epsilon p) x, \quad (6.1)$$

sendo que consideramos até a primeira ordem em ϵ , onde ϵ é um parâmetro constante infinitesimal. Também introduzimos $p = -i d/dx$, o qual será chamado de gerador de translações espaciais. A álgebra de tais geradores é abeliana.

Seja, agora, uma rotação infinitesimal no plano $x_1 x_2$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \epsilon x_2, \\ x'_2 &= -\epsilon x_1 + x_2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

a qual preserva o comprimento do vetor bidimensional

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Escrevendo as eq.(6.2) em uma forma mais compacta

$$X' = \left\{ 1 + i\epsilon \left[-i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \right\} X = \exp(i\epsilon L_{x_3}) X, \quad (6.4)$$

onde

$$L_{x_3} = -i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad (6.5)$$

interpretado como um gerador de rotações em torno do eixo x_3 . De modo similar, obtemos os geradores L_{x_1} e L_{x_2} que geram rotações em torno dos eixos x_1 e x_2 , respectivamente. Esses geradores satisfazem a álgebra

$$[L_{x_i}, L_{x_j}] = i \epsilon_{ijk} L_{x_k}. \quad (6.6)$$

A álgebra de momento angular $SO(3)$ expressa pela eq.(6.6) não é mais abeliana, com dimensão finita.

Imaginemos um ponto z no plano complexo e a transformação

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z), \quad (6.7)$$

onde ϵ é uma constante real infinitesimal e $f(z)$ é uma função analítica.

Para encontrar o gerador correspondente, reescrevemos a transformação acima

$$z' = \left(1 + \epsilon f(z) \frac{d}{dz}\right) z = \exp(i\epsilon L_f) z, \quad (6.8)$$

$$L_f = -i f(z) \frac{d}{dz} \quad (6.9)$$

de transformações conformes (transformações conformes são aquelas que preservam

ângulos). O comutador dos dois geradores L_f e L_g resulta

$$[L_f, L_g] = -i L_{\{f,g\}}, \quad (6.10)$$

$$L_{\{f,g\}} = -i (fg' - gf') \frac{d}{dz} = -i \{f, g\} \frac{d}{dz} \quad \left(f' = \frac{df}{dz}\right) \quad (6.11)$$

onde $\{f, g\}$ é o colchete de Poisson. Assim, os geradores de transformações conformes

pertencerão agora a uma álgebra de dimensão infinita. Tomando-se a base

$$f_n(z) = z^{-n+1} \quad g_m(z) = z^{-m+1}, \quad m, n \leq 1 \quad (6.12)$$

a álgebra citada resulta

$$[L_n, L_m] = -i(n - m)L_{m+n}. \quad (6.13)$$

Nós reconhecemos na eq.(6.13) a expressão usual da álgebra de Virasoro sem termo central.

No que segue, vamos procurar a forma dos geradores que induzem transformações bidimensionais tendo a propriedade fundamental de preservar os elementos infinitesimais de área.

Seja a transformação no plano x_1x_2

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow x'_1 &= \sigma_1(x_1, x_2), \\ x_2 \rightarrow x'_2 &= \sigma_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (6.14)$$

com a área transformando-se segundo $dx'_1 dx'_2 = K dx_1 dx_2$ onde K é o Jacobiano da transformação. Portanto, somente as transformações σ_1 e σ_2 para as quais o Jacobiano $K = 1$ satisfazem a condição de preservar a área.

A fim de obtermos os geradores de tais transformações, vamos considerar as transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \epsilon h_1(x_1, x_2), \\ x'_2 &= x_2 + \epsilon h_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal e h_1 e h_2 são funções bem comportadas. A condição $K = 1$ resulta (considerando-se até a primeira ordem em ϵ)

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = 0, \quad (6.16)$$

a qual é satisfeita se

$$h_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad h_2 = -\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (6.17)$$

onde $f(x_1, x_2)$ é uma função genérica bem comportada. Portanto, as transformações infinitesimais que preservam a área são da forma

$$x'_1 = x_1 + \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$x'_2 = x_2 - \epsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (6.18)$$

... sob uma forma mais compacta

$$X' = \left\{ 1 + i\epsilon(-i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right\} X = \exp(i\epsilon L_f) X, \quad (6.19)$$

$$L_f = -i \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (6.20)$$

Conseqüentemente

$$[L_f, L_g] = -i^2 \left(\frac{\partial \{f, g\}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial \{f, g\}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = i L_{\{f, g\}}, \quad (6.21)$$

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right). \quad (6.22)$$

A álgebra expressa pela eq.(6.21) é conhecida como a álgebra dos difeomorfismos de conservação da área e é equivalente a álgebra conhecida como w_∞ .

Vamos verificar a forma que a eq.(6.21) toma sob a escolha de algumas bases.

Seja, por exemplo, a base toroidal

$$f = \exp(i \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}), \quad g = \exp(i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}), \quad (6.23)$$

$\mathbf{m} = (m_1, m_2), \mathbf{n} = (n_1, n_2)$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ onde $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$. Em tal caso, a álgebra w_∞

... forma

$$[L_{\mathbf{m}}, L_{\mathbf{n}}] = i \mathbf{m} \times \mathbf{n} L_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, \quad (6.24)$$

... explicitamente

$$[L_{m_1, m_2}, L_{n_1, n_2}] = i(m_1 n_2 - m_2 n_1) L_{(m_1+m_2, n_1+n_2)}. \quad (6.25)$$

Seja a base planar

$$f = x_1^{m_1+1} x_2^{m_2+1}, \quad g = x_1^{n_1+1} x_2^{n_2+1}, \quad (6.26)$$

onde m_i, n_i são inteiros ≥ -1 . A álgebra w_∞ assume a forma

$$[L_m, L_n] = i((m_2 + 1)(n_1 + 1) - (m_1 + 1)(n_2 + 1)) L_{m+n}. \quad (6.27)$$

Se $m_2 = n_2 = 0$, nós temos a subálgebra de Virasoro.

Vamos revisar algumas considerações básicas a respeito de uma partícula de carga q e massa m em um campo magnético B perpendicular ao plano $x_1 x_2$. Sejam, então

$$\Pi_{x_i} = p_{x_i} - \frac{q}{c} A_{x_i},$$

$$\beta_{x_i} = \Pi_{x_i} - m\omega \varepsilon_{ij} x_j. \quad (6.28)$$

Temos, também

$$A_{x_i} = -\frac{1}{2} B \varepsilon_{ij} x_j - \partial_{x_i} \phi. \quad (6.29)$$

As relações de comutação no nível quântico são

$$\begin{aligned} [\Pi_{x_i}, \Pi_{x_j}] &= [\beta_{x_j}, \beta_{x_i}] = i\hbar m\omega \varepsilon_{ij}, \\ [\Pi_{x_i}, \beta_{x_j}] &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Assim percebemos que β_{x_i} comuta com a hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} (\Pi_{x_1}^2 + \Pi_{x_2}^2). \quad (6.31)$$

O momento angular diagonalizado é dado por (onde a, a^+, b, b^+ são definidos pelas eqs.(3.25) e (3.26))

$$J = -\frac{1}{2m\omega} (\Pi_{x_1}^2 + \Pi_{x_2}^2 - \beta_{x_1}^2 - \beta_{x_2}^2) = \hbar (b^+ b - a^+ a). \quad (6.32)$$

A hamiltoniana pode ser reescrita como

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad (6.33)$$

donde depreendemos que J comuta com a hamiltoniana.

simetria dinâmica é gerada por

$$j_+ = b^+ a, \quad j_- = a^+ b, \quad j = \frac{1}{2} (b^+ b - a^+ a). \quad (6.34)$$

taloso notarmos que os polinômios da forma

$$W_n^m = (\beta_{x_1})^{n+1} (\beta_{x_2})^{m+1} \quad (n, m \geq -1) \quad (6.35)$$

a álgebra W_∞ (a álgebra W_∞ é a álgebra clássica w_∞ acrescida de correções de ordens superiores de \hbar). Assim

$$[W_n^m, W_k^l] = i \hbar m \omega \{ (m+1)(k+1) - (n+1)(l+1) \} W_{n+k}^{m+l} + O(\hbar^2), \quad (6.36)$$

também a seguinte relação

$$[W_n^m, H] = 0. \quad (6.37)$$

combinando os geradores W_n^m na seguinte forma

$$T_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \exp \left(-i \frac{m\omega}{\hbar} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^{n+m} \alpha_1^n \alpha_2^m W_{n-1}^{m-1}, \quad (6.38)$$

os operadores de translação magnética que mantêm invariante a hamiltoniana

$$T_\alpha = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \alpha \cdot \beta \right), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2). \quad (6.39)$$

anteriormente o operador potencial vetor $A(x)$, o qual é linear em x , aparece na equação (6.31). Conseqüentemente, efetuando-se uma translação, teremos uma mudança de gauge. Portanto a hamiltoniana também mudará. Contudo, a hamiltoniana original pode ser recuperada executando-se uma transformação de gauge adicional que conduz o potencial a uma forma que ele tinha antes de ter sido efetuada a translação. Portanto, teremos uma transformação do sistema sob uma transformação composta (translação e gauge). Assim, os operadores de translação magnética expressos pela eq.(6.39) podem ser interpretados como sendo os operadores de translação que são caracterizados por translações acompanhadas de transformações de gauge,

$$T_\alpha = \exp \left(\frac{i}{2} \lambda^{-2} \varepsilon_{ij} x^i \alpha^j + \frac{iq}{\hbar c} \{ \phi(x + \alpha) - \phi(x) \} \right) \tau_\alpha, \quad (6.40)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \tau_\alpha = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \alpha \cdot \mathbf{p}\right). \quad (6.41)$$

A quantidade λ (comprimento magnético) descreve o raio da área ocupada por um estado degenerado. As relações de comutação entre os operadores translações magnéticas tornam-se

$$[T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}] = 2i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \lambda^{-2} \varepsilon_{ij} a^i b^j\right) T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}. \quad (6.42)$$

Vamos, nesse ponto, introduzir as seguintes combinações dos operadores translações magnéticas

$$\mathcal{L}_{-1} = \frac{T_{(-\Delta, -\Delta)} - T_{(\Delta, -\Delta)}}{q - q^{-1}}, \quad (6.43)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{T_{(\Delta, \Delta)} - T_{(-\Delta, \Delta)}}{q - q^{-1}}, \quad (6.44)$$

$$\mathcal{K} = T_{(2\Delta, 0)}. \quad (6.45)$$

Esses operadores satisfazem as seguintes relações

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{-1}] = \frac{\mathcal{K} - \mathcal{K}^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$\mathcal{K} \mathcal{L}_{\pm 1} \mathcal{K}^{-1} = q^{\pm 2} \mathcal{L}_{\pm 1}, \quad (6.46)$$

onde

$$q = \exp(i \Delta^2 \lambda^{-2}). \quad (6.47)$$

A álgebra (6.46) nada mais é do que a álgebra quântica $SU(2)_q$. A fim de que a segunda das eqs.(6.46) seja identificada com a forma usual de $SU(2)_q$, devemos empregar a expressão

$$\exp(L) T \exp(-L) = T + [L, T] + \frac{1}{2!} [L, [L, T]] + \dots \quad (6.48)$$

operador \mathcal{K} e a hamiltoniana comutam e, portanto, são simultaneamente diagonais. Tomando-se o gauge $\phi = Bx_1x_2/2$, as autofunções simultâneas resultam ser exatamente os estados de Landau

$$|n, l\rangle = \exp \left\{ 2\pi i \frac{l}{L_{x_1}} x_1 - \frac{1}{2\lambda^2} (x_2 - x_{20})^2 \right\} H_n \left(\frac{x_2 - x_{20}}{\lambda} \right), \quad (6.49)$$

$$x_{20} = -2\pi\lambda^2 \frac{l}{L_{x_1}}, \quad (6.50)$$

também foi imposta a condição de contorno periódica

$$p_{x_1} = 2\pi\hbar \frac{l}{L_{x_1}}. \quad (6.51)$$

Os $H_n(x)$ são os Polinômios de Hermite. O fator de normalização da eq.(6.49) não é importante nos argumentos que se seguem. Das eqs.(6.44) e (6.49), resulta

$$\mathcal{L}_{\pm 1} |n, l\rangle = \left[\frac{1}{2} \pm 2\pi l \frac{\lambda^2}{L_{x_1} \Delta} \right] |n, l \pm \frac{L_{x_1}}{2\pi\lambda^2} \Delta\rangle, \quad (6.52)$$

onde a notação $[x]$ significa

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}.$$

Se nós considerarmos que o espaço das representações é gerado por todos os estados de Landau, então devemos escolher $L_{x_1} \Delta / 2\pi\lambda^2 = 1$. Portanto

$$\Delta = 2\pi \frac{\lambda^2}{L_{x_1}}. \quad (6.53)$$

Portanto, os geradores da álgebra quântica (6.43)-(6.45) agindo na base (6.49) comportam-se

$$\mathcal{L}_{\pm 1} |n, l\rangle = \left[\frac{1}{2} \pm l \right] |n, l \pm 1\rangle, \quad (6.54)$$

$$\mathcal{K} |n, l\rangle = q^{2l} |n, l\rangle. \quad (6.55)$$

Nota-se que \mathcal{K} mede o número quântico l e $\mathcal{L}_{\pm 1}$ aumenta (diminui) l . É de suma importância enfatizarmos que essa álgebra está associada somente com o número quântico l , o qual caracteriza a degenerescência dos níveis de Landau. O nível de energia n é invariante sob a ação dessa álgebra. Esse é precisamente o ponto divergente em relação à álgebra representada pelas eqs.(6.34).

Um problema semelhante seria o caso de um potencial periódico no mesmo gauge

$$H = \frac{1}{2m}(p_{x_1} + m\omega x_2)^2 + \frac{1}{2m}p_{x_2}^2 + V(x_1, x_2), \quad (6.56)$$

onde $V(x_1 + a_1, x_2) = V(x_1, x_2 + a_2) = V(x_1, x_2)$.

Nesse caso, notemos que as seguintes combinações de translações magnéticas

$$E^+ = \frac{T_{(\Delta, \bar{\Delta})} - T_{(-\Delta, \bar{\Delta})}}{q - q^{-1}}, \quad (6.57)$$

$$E^- = \frac{T_{(-\Delta, -\bar{\Delta})} - T_{(\Delta, -\bar{\Delta})}}{q - q^{-1}}, \quad (6.58)$$

$$k = T_{(\Delta, 0)}, \quad (6.59)$$

satisfazem as relações que definem a álgebra $SU(2)_q$

$$[E^+, E^-] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}}, \quad kE^{\pm}k^{-1} = q^{\pm 1}E^{\pm}, \quad (6.60)$$

com a identificação

$$q = \exp(i\Delta\bar{\Delta}\lambda^{-2}). \quad (6.61)$$

Considerando-se $\Delta = L_{x_1}/(2j + 1)$ e $\bar{\Delta} = L_{x_2}/(2j + 1)$, os estados ou níveis de Landau ψ_l ($-j \leq l \leq j$) comportam-se como uma representação de spin j de $SU(2)_q$. Novamente, obtemos as relações

$$E^{\pm}\psi_l = \left[\frac{1}{2} \pm l\right] \psi_{l\pm 1}, \quad (6.62)$$

$$k\psi_l = q^l\psi_l. \quad (6.63)$$

Vamos, agora, examinar o problema do toro. Primeiramente, estudemos o sistema de uma partícula em um toro no nível mais baixo de Landau. Consideremos o caso de um toro quadrado de lado L na unidade $\lambda = 1$ e utilizemo-nos do gauge $\phi = Bx_1x_2/2$. A função de onda do nível mais baixo de Landau é escrita como (*Apêndice H*)

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) f(z), \quad (6.64)$$

onde $f(z)$ é uma função analítica de $z = x_1 + ix_2$ que satisfaz a seguinte condição periódica

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}L^2\right) \exp(iLz) f(z + iL). \quad (6.65)$$

Se o fluxo total N_s , que atravessa a superfície do toro satisfaz a condição

$$L^2 = 2\pi N_s, \quad (6.66)$$

então temos N_s soluções linearmente independentes da eq.(6.65), a saber

$$f_l(z) = \Theta \left[\begin{array}{c} \frac{l}{N_s} \\ 0 \end{array} \right] \left(\frac{N_s}{L} z | iN_s \right), \quad l = 1, \dots, N_s \quad (6.67)$$

onde

$$\Theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (w|\eta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\{i\pi n(n+a)^2 + 2\pi i(n+a)(w+b)\}. \quad (6.68)$$

Seja, agora, a seguinte correspondência

$$S_{(n,m)} = T_{(an, am)}, \quad a = \frac{L}{N_s}. \quad (6.69)$$

Utilizando-nos da eq.(6.66), podemos verificar que esses operadores e as funções de onda

$$\psi_l = \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) f_l(z), \quad (6.70)$$

satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} S_{(n,0)}\psi_l(z) &= \exp\left(2\pi i \frac{l}{N_s} n\right) \psi_l(z), \\ S_{(0,n)}\psi_l(z) &= \psi_{l+n}(z), \end{aligned} \quad (6.71)$$

e a lei da multiplicação

$$S_{(n,m)} = \exp\left(-\frac{i}{2} nma^2\right) S_{(n,0)} S_{(0,m)}. \quad (6.72)$$

Combinando as eqs.(6.66),(6.71) e (6.72), conseguimos

$$S_{(n,m)} \psi_l(z) = \exp\left[2\pi i \frac{n}{N_s} \left(\frac{m}{2} + l\right)\right] \psi_{l+m}(z). \quad (6.73)$$

Fazendo-se $\Delta = an, \bar{\Delta} = am$ nas eqs.(6.57)-(6.61), nós facilmente notamos que

$$E^+ = \frac{S_{(n,m)} - S_{(-n,m)}}{q - q^{-1}}, \quad E^- = \frac{S_{(-n,-m)} - S_{(n,-m)}}{q - q^{-1}}, \quad k = S_{(n,0)}, \quad (6.74)$$

satisfazem a álgebra $SU(2)_q$ (6.60) com

$$q = \exp(ia^2 nm). \quad (6.75)$$

Dessa forma, obtemos a ação da álgebra quântica sobre o toro

$$E^\pm \psi_l(z) = \frac{\exp\left[2\pi i \frac{n}{N_s} \left(\frac{m}{2} \pm l\right)\right] - \exp\left[-2\pi i \frac{n}{N_s} \left(\frac{m}{2} \pm l\right)\right]}{q - q^{-1}} \psi_{l+m}(z),$$

$$k \psi_l(z) = \exp\left(2\pi i \frac{n}{N_s} l\right) \psi_l(z). \quad (6.76)$$

Conseqüentemente temos as mesmas equações que (6.62) e (6.63) quando fazemos $n = m = 1$ nas eqs.(6.76). Pode ser depreendido da eq.(6.75) que o valor de q é relacionado ao fator de preenchimento

$$\nu = \frac{N_e}{N_s} \quad (6.77)$$

pela relação

$$q = \exp(2\pi i \nu). \quad (6.78)$$

O caso mencionado corresponde a $N_e = 1$ e outros casos ($N_e \neq 1$) serão discutidos a seguir.

Consideremos, nesse ponto, o caso de N_e elétrons. No sistema de partículas que não interagem, a lei da comultiplicação da álgebra quântica dá origem as representações de produto tensorial das autofunções de cada partícula

$$E^\pm = \sum_{i=1}^{N_e} k_1 \dots k_{i-1} E_i^\pm k_{i+1}^{-1} \dots k_{N_e}^{-1}, \quad k = \prod_{i=1}^{N_e} k_i, \quad (6.79)$$

e

$$\psi_{l_1, \dots, l_{N_e}} = \otimes_{i=1}^{N_e} \psi_{l_i}(x_{1i}, x_{2i}). \quad (6.80)$$

Por outro lado, se nosso interesse reside em sistemas com o fator de preenchimento dado por

$$\nu = \frac{1}{m} \quad (m \text{ sendo um inteiro ímpar}), \quad (6.81)$$

devemos trabalhar com as funções de onda de sistema de partículas interagentes no toro, a saber [16]

$$\psi_l = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} x_{2i}^2 \right] f_l(z_1, \dots, z_{N_e}), \quad (6.82)$$

$$f_l(z_1, \dots, z_{N_e}) = \prod_{j < k}^{N_e} \left[\frac{\Theta_1(z_j - z_k | i)}{\Theta_1'(0 | i)} \right]^m \Theta \left[\frac{l}{m} \right] \left(\frac{m}{L} \sum_j z_j | im \right). \quad (6.83)$$

De modo análogo ao caso mencionado de uma partícula, introduzimos os operadores translação magnética para o sistema de várias partículas e operamos sobre as funções de onda. O operador translação magnética total é definido pelos produtos das N_e cópias do operador translação magnética de uma partícula

$$S_{(n, m)}^{\text{total}} = \prod_{i=1}^{N_e} S_{(n, m)}^{(i)}(x_{1i}, x_{2i}). \quad (6.84)$$

Temos, assim, as seguintes relações

$$\begin{aligned} S_{(n, 0)}^{\text{total}} \psi_l(z) &= \exp \left(2\pi i \frac{N_e}{N_s} l n \right) \psi_l(z), \\ S_{(0, n)}^{\text{total}} \psi_l(z) &= \psi_{l+n}(z), \end{aligned} \quad (6.85)$$

e a lei da multiplicação dada por

$$S_{(n_1, n_2)}^{\text{total}} S_{(m_1, m_2)}^{\text{total}} = \exp\left(\frac{i}{2} a^2 N_e \varepsilon^{ij} n_i m_j\right) S_{(n_1+n_2, m_1+m_2)}^{\text{total}}. \quad (6.86)$$

Os geradores do grupo quântico são obtidos substituindo-se S por S^{total} nas eqs.(6.74) e as relações de comutação (6.60) são verificadas usando-se a eq.(6.86) com

$$q = \exp(ia^2 N_e nm) \quad (6.87)$$

Encontramos, assim, equações semelhantes as (6.76), a saber

$$E^\pm \psi_l(z) = \frac{\exp\left[2\pi i \nu n \left(\frac{m}{2} \pm l\right)\right] - \exp\left[-2\pi i \nu n \left(\frac{m}{2} \pm l\right)\right]}{q - q^{-1}} \psi_{l+m}(z),$$

$$k \psi_l(z) = \exp(2\pi i \nu n l) \psi_l(z). \quad (6.88)$$

Novamente colocando-se $n = m = 1$, verificamos que a eq.(6.87) coincide com (6.78) e as eqs.(6.88) tornam-se as mesmas relações que (6.62) e (6.63).

Título 7

Relação entre as funções de Laughlin e as funções solitônicas

Consideremos a hamiltoniana que descreve um elétron sob a ação de um campo magnético perpendicular ao plano ao qual está confinada nossa partícula

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c} A \right)^2, \quad (7.1)$$

Consideraremos o gauge simétrico $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ e o comprimento magnético será dado por $1/\sqrt{qB}$. Doravante, assumir-se-á $\hbar = c = \lambda = m = 1$.

Definimos os seguintes operadores

$$a = \frac{1}{2} z + \bar{\partial}, \quad a^+ = \frac{1}{2} \bar{z} - \partial, \quad (7.2)$$

$$b = \frac{1}{2} \bar{z} + \partial, \quad b^+ = \frac{1}{2} z - \bar{\partial}, \quad (7.3)$$

satisfazem as relações de comutação $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$, onde $z = x_1 + ix_2$, $\partial = \partial/\partial z$.

A hamiltoniana e o momento angular são escritos

$$H = 2a^+a + 1, \quad J = b^+b - a^+a. \quad (7.4)$$

O estado fundamental é determinado pela condição

$$a \psi_{00} = b \psi_{00} = 0, \quad (7.5)$$

de tal forma que a função de onda é dada por

$$\psi_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (7.6)$$

Utilizando os operadores criação, obtemos a forma genérica das funções de onda

$$\psi_{nm} = \frac{(b^+)^{m+n}}{\sqrt{(m+n)!}} \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} \psi_{00}, \quad (7.7)$$

onde n representa a energia e m o momento angular.

No caso de um campo magnético de grande intensidade, somente o nível mais baixo de Landau é ocupado devido ao grande *gap* de energia existente entre os níveis. A função de onda que representa esse nível mais baixo de energia é dada por

$$\psi_{0m} = \frac{z^m}{\sqrt{m!\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (7.8)$$

Em um sistema de muitos corpos no qual os elétrons não interagem, podemos obter a função de onda através do produto tensorial das funções de onda de um corpo. O sistema Hall quântico é caracterizado não somente pela interação coulombiana entre os elétrons, como também pelo efeito das impurezas. É, portanto, conveniente considerarmos o *ansatz* proposto por Laughlin, uma vez que é difícil de obtermos a exata função de muitos corpos. Através da análise de problemas de dois e três corpos, Laughlin introduziu a seguinte função de onda

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{2} \sum |z_i|^2\right), \quad (7.9)$$

onde m é um número ímpar devido ao princípio de Pauli e é dado pelo inverso do fator de preenchimento ν .

A parte dessa função de onda conhecida por função de Jastrow é

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^m, \quad (7.10)$$

e satisfaz a seguinte equação

$$\left(\partial_i - m \sum_{i>j} \frac{1}{z_i - z_j}\right) f = 0. \quad (7.11)$$

Essa equação é encontrada em teoria de campo conforme e é chamada de equação de Knizhnik-Zamolodchikov. Portanto, é natural expressarmos (7.10) como uma função correlação dos operadores de vértice da teoria de campo conforme.

O operador de vértice é dado por

$$V(k, z) = \exp(ikX^+(z)) \exp(ikX^-(z)), \quad (7.12)$$

onde

$$X^+(z) = q - \sum_{n>0} \frac{i}{\sqrt{n}} a_{-n} z^n, \quad (7.13)$$

$$X^-(z) = -ip \ln z + \sum_{n>0} \frac{i}{\sqrt{n}} a_n z^{-n}. \quad (7.14)$$

Os coeficientes de z satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[a_n, a_{-n'}] = n \delta_{nn'}, \quad [q, p] = i. \quad (7.15)$$

O valor esperado da função correlação de N pontos é

$$\langle 0 | V(k_1, z_1) V(k_2, z_2) \dots V(k_N, z_N) | 0 \rangle = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^{k_i k_j}, \quad (7.16)$$

onde o estado de vácuo é definido por

$$a_n | 0 \rangle = p | 0 \rangle = 0. \quad (n \geq 1) \quad (7.17)$$

Comparando a eq.(7.16) com a eq.(7.10), concluímos que f é descrita por operadores de vértice onde $k_i^2 = m, \forall_i$.

Escrevendo

$$a_{-n} = \sqrt{n} t_n, \quad (n \geq 1) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial t_n} \quad (n \geq 1), \quad (7.18)$$

$$q = -it_0, \quad p = \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (7.19)$$

é possível termos uma outra realização de (7.12), a saber

$$\tilde{V}(k, z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + k \sum_{n=0} t_n z^n\right) \exp\left[k \left(\ln z \frac{\partial}{\partial t_0} - \sum_{n>0} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial t_n} z^{-n}\right)\right]. \quad (7.20)$$

Desde que o fator gaussiano não é afetado pela operação de a_n , ele foi incluído na definição do operador de vértice. O produto de dois operadores é da forma

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k_1, z_1) \tilde{V}(k_2, z_2) &= (z_1 - z_2)^{k_1 k_2} \exp \sum_{j=1,2} \left(-\frac{1}{2}|z_j|^2 + \sum_{n=0} t_n k_j z_j^n\right) \times \\ &\times \exp \left[\sum_{j=1,2} \left(k_j \ln z_j \frac{\partial}{\partial t_0} - \sum_{n>0} \frac{1}{n} k_j z_j^{-n} \frac{\partial}{\partial t_n}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.21)$$

os quais capacita-nos a escrever a função de Laughlin como

$$\tilde{V}(k_1, z_1) \tilde{V}(k_2, z_2) \dots \tilde{V}(k_N, z_N) \cdot 1|_{t_n \rightarrow 0} = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^{k_i k_j} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_i |z_i|^2\right), \quad (7.22)$$

onde $k_i^2 = m, \forall_i$.

Esse operador é muito semelhante ao operador de vértice da hierarquia KP, o qual tem a forma

$$\begin{aligned} V_{KP}(z, w) &= \exp\left(\sum_{n>0} (z^n - w^n) t_n\right) \exp\left[-\sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{z^n} - \frac{1}{w^n}\right) \frac{\partial}{\partial t_n}\right] \\ &\propto (z - w) \tilde{V}(1, z) \tilde{V}(-1, w). \end{aligned} \quad (7.23)$$

O operador representado pela eq.(7.23) gera a transformação de Bäcklund da hierarquia KP. Esse fato sugere que o sistema Hall quântico está de algum modo relacionado a teoria solitônica. Portanto, uma interessante questão é se existem coeficientes da equação bilinear de Hirota de tal forma que as funções de Laughlin sejam soluções.

A forma geral da equação bilinear de Hirota é dada por

$$F(D_1, D_2, D_3) f \cdot f = (\alpha \exp(D_1) + \beta \exp(D_2) + \gamma \exp(D_3)) f \cdot f = 0, \quad (7.24)$$

com o vínculo

$$F(0, 0, 0) = 0, \quad (7.25)$$

onde D_i é a derivada de Hirota, por exemplo

$$D_x^n a(x) b(x) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} a(x+s)b(x-s)|_{s=0}. \quad (7.26)$$

Escrevendo explicitamente, conseguimos

$$\begin{aligned} \alpha f(\mu+1, \nu, \lambda) f(\mu-1, \nu, \lambda) + \beta f(\mu, \nu+1, \lambda) f(\mu, \nu-1, \lambda) + \\ + \gamma f(\mu, \nu, \lambda+1) f(\mu, \nu, \lambda-1) = 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Utilizando a seguinte transformação de variáveis

$$2\mu = K_2 + K_3, \quad 2\nu = K_3 + K_1, \quad 2\lambda = K_1 + K_2, \quad k_i = K_i - \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7.28)$$

conseguimos

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{f}(k_1+1, k_2, k_3) \tilde{f}(k_1, k_2+1, k_3+1) + \beta \tilde{f}(k_1, k_2+1, k_3) \tilde{f}(k_1+1, k_2, k_3+1) + \\ + \gamma \tilde{f}(k_1, k_2, k_3+1) \tilde{f}(k_1+1, k_2+1, k_3) = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Escrevendo a função de Laughlin na forma simétrica

$$\tilde{f}(k_1, k_2, \dots, k_N) = \prod_{i \neq j} (z_i - z_j)^{\frac{k_i k_j}{2}} \exp \left[i\pi \left(-\frac{1}{4} \sum_l k_l^2 + \frac{1}{4} K^2 \right) \right], \quad (7.30)$$

e substituindo-a na eq.(7.29), resulta

$$\begin{aligned} \alpha &= 2z_1 - z_2 - z_3 \\ \beta &= 2z_2 - z_3 - z_1 \\ \gamma &= 2z_3 - z_1 - z_2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dessa forma, concluímos que as funções de Laughlin são soluções da equação de Hirota contanto que os coeficientes tenham a forma dada pelas eqs.(7.31). Por outro lado, a equação de Hirota também admite soluções do tipo solitônicas. Por exemplo, a solução para um sólon toma a forma

$$\tilde{f}(k_1, k_2, \dots, k_N) = 1 + \exp \left(\sum_{i=1}^N p_i k_i + \varphi \right). \quad (7.32)$$

As velocidades p_i 's desse sóliton estão sujeitas à seguinte condição espectral

$$F(v_1, v_2, v_3) = 0, \quad (7.33)$$

onde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3), \\ v_2 &= \frac{1}{2}(-p_2 + p_3 + p_1), \\ v_3 &= \frac{1}{2}(-p_3 + p_1 + p_2), \end{aligned} \quad (7.34)$$

a qual relaciona os p_i 's aos z_i 's através das eqs.(7.28) e (7.25). A forma explícita da condição espectral é a seguinte

$$\begin{aligned} (2z_1 - z_2 - z_3) \cosh \left[\frac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3) \right] + (2z_2 - z_3 - z_1) \cosh \left[\frac{1}{2}(-p_2 + p_3 + p_1) \right] + \\ + (2z_3 - z_1 - z_2) \cosh \left[\frac{1}{2}(-p_3 + p_1 + p_2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Na eq.(7.32), os k_i 's e os p_i 's representam as coordenadas e as velocidades, respectivamente. Os p_i 's dependem dos z_i 's via eq.(7.35). Portanto, isso implica que o sóliton tem uma certa informação do efeito Hall quântico através dos valores do fator de preenchimento e das posições dos elétrons.

Capítulo 8

Ânions em um campo magnético

Vamos supor que nós temos um sistema de duas partículas descrito por uma função de onda Ψ (fig. 8.1)



Figura 8.1: Configuração de um sistema composto de duas partículas.

Façamos, agora, uma rotação desse sistema segundo um ângulo θ (fig. 8.2)

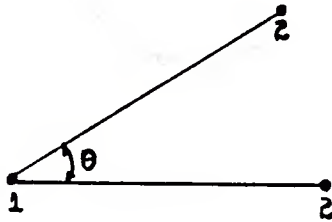


Figura 8.2: Configuração do sistema de duas partículas após uma rotação de um ângulo θ .

Observemos que a função de onda que descreverá esse sistema será

$$\Psi' = \exp(i\nu\theta) \Psi, \quad (8.1)$$

onde $\nu \in [0, 2)$ é o parâmetro que representa a estatística.

Em $d = 2$ (espaço bidimensional), o spin pode tomar qualquer valor (não somente inteiros ou semi-inteiros).

Do teorema “spin-estatística”, podemos concluir que em $d = 2$ a estatística pode ser qualquer coisa, ou seja, não teremos mais apenas bósons ou férmions, mas surgem os chamados ânions.

A permutação dessas duas partículas pode ser efetuada de duas maneiras diferentes (fig. 8.3 e fig. 8.4)

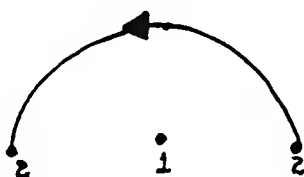


Figura 8.3: Permutação de duas partículas segundo um ângulo $\theta = \pi$.

Notemos que nesse caso temos $\theta = \pi$, o que resulta uma fase igual a $\exp(i\nu\pi)$.



Figura 8.4: Permutação de duas partículas segundo um ângulo $\theta = -\pi$.

Observemos que nesse caso temos $\theta = -\pi$, o que origina uma fase igual a $\exp(-i\nu\pi)$

Em dimensão superior ou igual a 3, o caminho traçado na fig. 8.3 pode ser continuamente deformado no caminho traçado na fig. 8.4. Do ponto de vista topológico, eles são iguais.

Assim

$$\exp(i\nu\pi) = \exp(-i\nu\pi) \implies \begin{cases} \nu\pi = 0 \text{ ou temos que } \nu = 0 \text{ (bósons),} \\ \nu\pi = \pi \text{ ou temos que } \nu = 1 \text{ (férmions),} \end{cases}$$

já que $\nu \in [0, 2)$.

Em $d = 2$, não podemos deformar continuamente o caminho traçado na fig. 8.3 para resultar no caminho traçado na fig. 8.4 (observemos que estamos assumindo o fato de as partículas 1 e 2 terem núcleo rígido, ou seja, elas são impenetráveis). Do ponto de vista topológico, os caminhos traçados nas figs. 8.3 e 8.4 são diferentes (mesma configuração final, mas a forma de se atingir essa configuração final foi diferente). Portanto, não há restrições sobre ν .

A hamiltoniana de um conjunto de N ânions idênticos de massa m e carga q (rotulados pelos índices gregos α, β, \dots) movendo-se em um plano na presença de um campo magnético externo \mathbf{B} (constante, uniforme e perpendicular ao plano) é dada por

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \frac{-1}{2m} (\nabla_{\alpha} - ia_{\alpha} - iqA(\mathbf{x}_{\alpha}))^2. \quad (8.2)$$

Sem perdas de generalidade, assumiremos que B é positivo e trabalharemos com o gauge simétrico dado por

$$A^i = \frac{-B}{2} \epsilon^{ij} x^j, \quad (8.3)$$

onde $i, j = 1, 2$.

O potencial efetivo não local é dado por

$$a_{\alpha}^i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \epsilon^{ij} \frac{x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j}{|\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}|^2}. \quad (8.4)$$

Esse potencial é que descreverá as interações de cunho estatístico. O campo magnético estatístico associado é dado por

$$b_{\alpha}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = -2\pi\nu \sum_{\beta \neq \alpha} \delta^2(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}). \quad (8.5)$$

Uma formulação alternativa para a mecânica quântica de muitos ânions é baseada na observação de que o campo estatístico a_{α} é descrito por um gauge puro exceto na localização das partículas

$$a_{\alpha}^i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = -\nu \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^i} \sum_{\beta \neq \alpha} \theta_{\alpha\beta}, \quad (8.6)$$

onde

$$\theta_{\alpha\beta} = \arctan \left(\frac{x_{\alpha}^2 - x_{\beta}^2}{x_{\alpha}^1 - x_{\beta}^1} \right). \quad (8.7)$$

Através de uma transformação de gauge singular, podemos remover a_{α} da hamiltoniana às custas de redefinirmos as funções de onda por um fator de fase

$$\Psi'(x_1, \dots, x_N) = \exp(i\nu \sum_{\alpha < \beta} \theta_{\alpha\beta}) \Psi(x_1, \dots, x_N). \quad (8.8)$$

Nessa formulação, a hamiltoniana torna-se a soma usual das hamiltonianas de um corpo e a interação estatística é escondida nas condições de contorno as quais tornam as funções de onda Ψ' funções *multi-valued*. Doravante, consideraremos apenas essas funções *multi-valued* e indicaremos Ψ' simplesmente por Ψ .

Usando-se a notação complexa

$$\begin{aligned} z &= x^1 + ix^2, & \partial &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \bar{z} &= x^1 - ix^2, & \bar{\partial} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

a hamiltoniana sob a transformação de gauge citada previamente torna-se

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \left(-\frac{2}{m} \bar{\partial}_{\alpha} \partial_{\alpha} + \frac{q^2 B^2}{8m} |z_{\alpha}|^2 \right) - \frac{qB}{2m} J, \quad (8.9)$$

onde J é o operador momento angular total e é dado por

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (z_{\alpha} \partial_{\alpha} - \bar{z}_{\alpha} \bar{\partial}_{\alpha}). \quad (8.10)$$

Notemos que J comuta com H ; vamos então procurar auto-estados simultâneos de H e J (Doravante, esperando não haver qualquer confusão, tanto o operador momento angular total como seu autovalor serão indicados por J).

Antes de discutirmos as funções de onda de muitos ânions, consideremos alguns fatos concernentes aos níveis de Landau. As funções de onda (não normalizadas) de um corpo que representam os níveis de Landau são (*Apêndice I*)

$$\Psi_n^J(z, \bar{z}) = z^k \bar{z}^l |z|^{(|k-l|-(k+l))} \exp\left(-\frac{qB}{4}|z|^2\right) L_n^{|k-l|} \left(\frac{qB}{2}|z|^2\right), \quad (8.11)$$

$$E_n^J = \frac{qB}{m} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(|J| - J) \right), \quad (8.12)$$

onde $J = k - l$; $k, l \in Z_+$ e $L_n^{|k-l|}$ são os polinômios de Laguerre generalizados (*Apêndice J*).

Os níveis de energia têm uma degenerescência infinita (para modelos de área finita essa degenerescência é finita) dados por todos os estados com o mesmo número quântico n e momento angular arbitrário alinhado paralelo ao campo magnético externo. Estados com momento angular alinhado antiparalelo ao campo magnético externo têm ao invés energias linearmente proporcionais ao momento angular.

Se considerarmos agora estados que têm o momento angular alinhado paralelo ao campo magnético externo ($|J| - J = 0$) e fazendo-se $J = k - l = j$, então

$$\Psi_n^j(z, \bar{z}) = z^j L_n^j \left(\frac{qB}{2} |z|^2 \right) \exp \left(-\frac{qB}{4} |z|^2 \right), \quad (8.13)$$

$$E = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (8.14)$$

onde $n \geq 0$; $j \geq -n$; $n, j \in Z$ e $\omega = \frac{qB}{m}$ é a frequência ciclotrônica .

As funções de onda de muitos corpos são obtidas formando-se produtos totalmente simetrizados (bósons) ou anti-simetrizados (férmions) de funções de onda de um corpo. Assim os autovalores da energia e do momento angular para o estado fundamental são

$$\begin{aligned} \text{Bósons :} \quad E &= \frac{qB}{m} \frac{N}{2}, \\ J &= d_+, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Férmions :} \quad E &= \frac{qB}{m} \frac{N}{2}, \\ J &= \frac{1}{2}N(N - 1) + d_+, \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde d_+ é um inteiro não negativo.

Estados com $n = 0$ e momento angular menor que os valores do estado fundamental mínimo (0 para bósons, $\frac{1}{2}N(N - 1)$ para férmions) necessariamente têm energia maior.

É conveniente extrairmos da função de onda descrita pela eq.(8.8) o fator

$$\exp \left(-\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2 \right).$$

Isso resulta no problema de autovalor

$$\hat{H}\hat{\Psi} = \left(E - \frac{N}{2}\omega\right)\hat{\Psi}, \quad (8.17)$$

$$J\hat{\Psi} = j\hat{\Psi}, \quad (8.18)$$

onde a nova hamiltoniana \hat{H} e as novas funções de onda $\hat{\Psi}$ são definidas por

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^N \left(-\frac{2}{m} \bar{\partial}_\alpha \partial_\alpha + \frac{qB}{m} \bar{z}_\alpha \bar{\partial}_\alpha \right), \quad (8.19)$$

$$\hat{\Psi} = \exp\left(\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right) \Psi. \quad (8.20)$$

As funções de onda $\hat{\Psi}$ devem satisfazer a duas exigências físicas. As funções $\hat{\Psi}$ devem se anular em pontos de coincidência se $\nu \neq 0$. Essa exigência de núcleo rígido evita a possibilidade de as partículas se sobreporem: de fato, a possibilidade de estatística intermediária em dimensões (2+1) é decorrência da topologia não trivial do espaço de configuração M_N^d com pontos de coincidência excluídos.

Para $d \geq 3$, o grupo fundamental $\Pi_1(M_N^d)$ é o grupo de permutação S_N : as funções de onda devem ser representações abelianas de S_N originando a estatística bosônica e fermiônica.

Para $d = 2$, o grupo fundamental $\Pi_1(M_N^2)$ é o *braid group* B_N (de N elementos). Ainda conforme nossa construção, as funções $\hat{\Psi}$ devem ser funções *multi-valued*. Portanto, seguem dois tipos de funções de onda (*Apêndice K*)

$$\hat{\Psi}_I = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^\nu P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N), \quad (8.21)$$

$$\hat{\Psi}_{II} = \prod_{\alpha < \beta} (\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta)^{2-\nu} P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N). \quad (8.22)$$

Enfatizemos que para $\nu \neq 0, 1$ os estados Ψ_I e Ψ_{II} não se sobrepõem. De fato, o comportamento radial da função P nas eqs.(8.21),(8.22) nos pontos de coincidência é $|z_{\alpha\beta}|^l$ com

l par e não negativo. Isso evita transformar estados do tipo I em estados do tipo II escrevendo, por exemplo

$$P = \prod_{\alpha < \beta} \bar{z}_{\alpha\beta}^2 |z_{\alpha\beta}|^{-2\nu} \tilde{P},$$

onde $\bar{z}_{\alpha\beta} = \bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta$ e $z_{\alpha\beta} = z_\alpha - z_\beta$.

Naturalmente $\hat{\Psi}_I$ e $\hat{\Psi}_{II}$ se sobrepõem para $\nu = 0, 1$.

Notemos também que todas as funções de onda bosônicas ($\nu = 0$) podem ser escritas conforme as eqs.(8.21),(8.22) onde P é um polinômio nas variáveis z_α e \bar{z}_α . Também todas as funções de onda fermiônicas ($\nu = 1$) podem ser escritas conforme as eqs.(8.21),(8.22); nesse caso, contudo, P não é necessariamente um polinômio nas variáveis z_α e \bar{z}_α , como é claro do exemplo a seguir.

A autofunção de energia e momento angular para três férmions é dada por

$$\hat{\Psi} = z_{12}\bar{z}_3 + z_{23}\bar{z}_1 + z_{31}\bar{z}_2. \quad (8.23)$$

Essa autofunção pode ser escrita conforme eq.(8.21) com P tendo a forma

$$P = \frac{\bar{z}_3}{z_{13}z_{23}} + \frac{\bar{z}_1}{z_{12}z_{13}} + \frac{\bar{z}_2}{z_{12}z_{32}}. \quad (8.24)$$

Notamos que a expressão dada pela eq.(8.24) não é um polinômio. O caso especial em que P é um polinômio (no caso de férmions) é quando todos os férmions estão no primeiro nível de Landau.

Vamos agora considerar quais formas de P nas eqs.(8.21),(8.22) produzem auto-estados simultâneos dos operadores momento angular e energia. Uma vez que o caráter que torna $\hat{\Psi}$ *multi-valued* está residindo somente no fator estatístico, então P deve ser *single-valued* e totalmente simétrico sob permutação dos rótulos $1 \dots N$. É conveniente ainda decompor P segundo

$$P = S \phi\left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right). \quad (8.25)$$

Nessa decomposição, S determinará a contribuição para o momento angular de P . As formas mais gerais de S e ϕ que tornam as funções de onda descritas pelas eqs.(8.21),(8.22)

auto-estados simultâneos da energia e do momento angular não são conhecidas. Contudo, várias classes de auto-estados simultâneos podem ser escritas fazendo-se escolhas adequadas de S e ϕ .

Em particular, escolhendo-se $S = S^{(d_+)}(z_1, \dots, z_N)$ (qualquer polinômio homogêneo totalmente simétrico de grau inteiro d_+ dependente somente das variáveis z , por exemplo, se $N = 3$ e $d_+ = 1$ temos $S = z_1 + z_2 + z_3$, se $N = 3$ e $d_+ = 3$ temos $S = z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_3^2 z_2$) para estados do tipo I torna a eq.(8.21) um auto-estado simultâneo de H e J . Analogamente, escolhendo-se $S = S^{(d_+)}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$, dependente somente das variáveis \bar{z} , produz auto-estados simultâneos de H e J do tipo II . É evidente que poderíamos fazer escolhas mais complicadas para S .

Vamos então recapitular nossas idéias. Nosso ponto de partida é a hamiltoniana \hat{H} e a função de onda $\hat{\Psi}$. Vamos analisar estados do tipo I (estados do tipo II são considerados de forma análoga). Nós procuraremos auto-estados $\hat{\Psi}_I$ de \hat{H} (e do momento angular) do tipo I dados por

$$\hat{\Psi}_I(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^\nu P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N). \quad (8.26)$$

As condições de auto-estado de $\hat{\Psi}_I$ tornam-se condições de auto-estado sobre P . De fato, para $\hat{\Psi}_I$ ser um auto-estado de J , devemos solicitar que P seja também um auto-estado do mesmo operador J (desde que o fator estatístico $\prod_{\alpha < \beta}^N (z_\alpha - z_\beta)^\nu$ é ele próprio um auto-estado de J com autovalor $\frac{\nu}{2}N(N-1)$).

Mas para $\hat{\Psi}_I$ ser um auto-estado de \hat{H} , notamos que P deve satisfazer a equação

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(-\frac{2}{m} \partial_\alpha + \frac{qB}{m} \bar{z}_\alpha \right) \bar{\partial}_\alpha P - \frac{2}{m} \nu \sum_{\alpha < \beta} \left(\frac{\bar{\partial}_\alpha - \bar{\partial}_\beta}{z_\alpha - z_\beta} \right) P = \left(E - \omega \frac{N}{2} \right) P. \quad (8.27)$$

Seja a equação

$$P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = S^{(d_+)}(z_1, \dots, z_N) \phi\left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right). \quad (8.28)$$

Inserindo a eq.(8.28) na eq.(8.27), resulta

$$y \phi''(y) + \left(d_+ + N + \frac{\nu}{2} N(N-1) - y \right) \phi'(y) + \left(\frac{E}{\omega} - \frac{N}{2} \right) \phi(y) = 0. \quad (8.29)$$

Essa é precisamente uma equação diferencial cujas soluções são os polinômios de Laguerre generalizados. Logo

$$\phi(y) = L_n^{d_++N-1+\frac{\nu}{2}N(N-1)}(y), \quad (8.30)$$

onde $n = \frac{E}{\omega} - \frac{N}{2} \in Z^+$.

Dessa forma, resulta a seguinte expressão para os auto-estados da energia e do momento angular para um sistema de N ânions

TIPO I

$$\begin{aligned} \Psi_I(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) &= \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^\nu S^{(d_+)}(z_1, \dots, z_N) \times \\ &\times L_n^{d_++N-1+\frac{\nu}{2}N(N-1)}\left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right) \exp\left(-\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right), \end{aligned} \quad (8.31)$$

onde

$$E_I = \omega \left(n + \frac{N}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.32)$$

$$J_I = \frac{\nu}{2}N(N-1) + d_+, \quad d_+ = 0, 1, 2, \dots \quad (8.33)$$

Se tivéssemos usado em vez da eq.(8.28) a equação

$$P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = S^{(d_+)}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) \phi\left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right), \quad (8.34)$$

nós conseguiríamos de modo análogo os estados do tipo II, a saber

TIPO II

$$\Psi_{II}(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = \prod_{\alpha < \beta} (\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta)^{2-\nu} S^{(d_+)}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) \times$$

$$\times L_n^{d_+ + \frac{2-\nu}{2}N(N-1) + N-1} \left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2 \right) \exp \left(-\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2 \right), \quad (8.35)$$

onde

$$E_{II} = \omega \left(n + \frac{N}{2} + d_+ + \frac{(2-\nu)}{2}N(N-1) \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.36)$$

$$J_{II} = -\frac{(2-\nu)}{2}N(N-1) - d_+, \quad d_+ = 0, 1, \dots \quad (8.37)$$

Se quiséssemos obter soluções mais gerais que essas, precisaríamos de um *ansatz* mais geral que os usados nas eqs.(8.28),(8.34).

Notemos que os estados do tipo *I* têm momento angular positivo limitado abaixo por $\frac{\nu}{2}N(N-1)$, enquanto os estados do tipo *II* têm momento angular negativo limitado acima por $-\frac{(2-\nu)}{2}N(N-1)$.

O momento angular negativo aumenta o valor da energia para estados do tipo *II*, introduzindo uma dependência em ν e N^2 , dependência essa que não está presente para estados do tipo *I*.

Para estados do tipo *I*, o momento angular é paralelo ao campo magnético externo o qual cancela o parâmetro estatístico ν , produzindo autovalores de energia independentes do parâmetro estatístico ν e que aumentam linearmente com N .

É instrutivo examinarmos os limites $\nu = 0$ (bóson) e $\nu = 1$ (férmion). O estado fundamental é descrito por estados do tipo *I* com $n = 0$. Considerando-se $\nu = 0$ ($\nu = 1$), os autovalores do tipo *I* dão os corretos autovalores de energia e momento angular para o problema de N corpos bosônicos (fermiônicos)(eqs.(8.15),(8.16)). Além disso, as funções de onda do tipo *I* (considerando-se $n = 0$) geram todas as funções de onda bosônicas e fermiônicas no estado fundamental quando consideramos $\nu = 0$ e $\nu = 1$, respectivamente. Para verificarmos isso, notemos primeiro que os polinômios homogêneos simétricos $S^{(d_+)}$ na eq.(8.31) podem ser

expandidos em certas bases naturais. A primeira base ($B^{(1)}$) natural é dada pelos permanentes

$$B_{\{d_1, \dots, d_N\}}^{(1)} = \sum_{\text{permanentes } \pi} z_{\pi(1)}^{d_1} z_{\pi(2)}^{d_2} \cdots z_{\pi(N)}^{d_N}. \quad (8.38)$$

Podemos também usar uma segunda base ($B^{(2)}$) que é dada por

$$B_{\{d_1, \dots, d_N\}}^{(2)} = \sum_{\text{permanentes } \pi} \frac{(-1)^{\text{sign} \pi} z_{\pi(1)}^{d_1+N-1} z_{\pi(2)}^{d_2+N-2} \cdots z_{\pi(N)}^{d_N}}{\prod_{\alpha < \beta}^N (z_\alpha - z_\beta)}, \quad (8.39)$$

onde aqui $\{d_1, \dots, d_N\}$ está representando qualquer conjunto não ordenado de inteiros não negativos com $\sum_k d_k = d_+$. Por exemplo, $\{0, 1\}$ é o mesmo que $\{1, 0\}$. A transformação linear entre as duas bases ($B^{(1)}$) e ($B^{(2)}$) envolve coeficientes que são os caracteres do grupo simétrico S_N .

Quando $\nu = 0$, notamos que ($B^{(1)}$) é a base mais conveniente. Assim as funções de onda Ψ_I (para $n = 0$) são precisamente todos os permanentes de Slater os quais geram o estado fundamental do problema bosônico de N corpos.

Quando $\nu = 1$, ($B^{(2)}$) é a base mais conveniente porque nas funções de onda Ψ_I (para $n = 0$), o fator $\prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)$ cancela o denominador da eq.(8.39), resultando apenas os numeradores os quais são precisamente todos os determinantes de Slater que geram o estado fundamental do problema fermiônico de N corpos.

É também oportuno ressaltar que enquanto as funções de onda do tipo I (para $n = 0$) geram todos os estados no nível fundamental, elas não geram todos os estados com energia mais alta. Isso é porque estados de energia mais alta podem envolver momento angular negativo. Muitos, mas não todos desses estados de energia mais alta, originam-se dos estados do tipo II , os quais têm momento angular total negativo. Contudo, existem funções de onda que descrevem o sistema de N férmions ou o sistema de N bósons que não estão incluídas nos estados representados pelas eqs.(8.31),(8.35). Essas funções surgem quando consideramos S como função das variáveis z e das variáveis \bar{z} . Recordemos que para obtermos as eqs.(8.31),(8.35), S foi escolhido como dependente ou somente das variáveis z (que gerou os estados do tipo I) ou somente das variáveis \bar{z} (que gerou os estados do tipo II).

Sejam agora as funções de onda de Laughlin de fator de preenchimento $\frac{1}{2m+1}$ ($m \in z_+$)

$$\Psi_L(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{2m+1} \exp\left(-\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_\alpha|^2\right). \quad (8.40)$$

Essas funções, que desempenham importante papel no estudo do efeito Hall quântico fracionário, aparecem como particulares estados fermiônicos do tipo I com $n = 0$, momento angular maior e $S^{(d_+)} = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{2m}$. Então $d_+ = mN(N-1)$ e $J = \frac{(2m+1)}{2}N(N-1) = \frac{1}{2}N(N-1) + d_+$ conforme esperado da eq.(8.31). De fato, da eq.(8.40), notamos que o estado de Laughlin Ψ_L é uma soma de estados fermiônicos representados pelo determinante de Slater (todos no nível mais baixo de Landau). Por exemplo, um desses estados é a soma anti-simetrizada de

$$z_1^0 z_2^{(2m+1)} z_3^{2(2m+1)} \dots z_N^{(N-1)(2m+1)} \exp\left(-\frac{qB}{4} \sum_{\alpha} |z_\alpha|^2\right),$$

o que corresponde ao preenchimento de todo $(2m+1)$ éximo estado de momento angular de partícula única.

Capítulo 9

Obtenção das funções de onda dos tipos *I* e *II* através do formalismo dos operadores de Vértice

Sejam z e \bar{z} dados por

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (9.1)$$

Uma transformação conforme genérica é dada por

$$z' = F(z). \quad (9.2)$$

As diferenciais transformam-se como

$$dx'_1 = \mu(x_1, x_2) R_{lm}(\theta(x_1, x_2)) dx_m, \quad (9.3)$$

sendo R_{lm} a matriz de rotação local

$$\begin{pmatrix} \cos \theta(x_1, x_2) & \text{sen} \theta(x_1, x_2) \\ -\text{sen} \theta(x_1, x_2) & \cos \theta(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

e $\mu(x_1, x_2)$ sendo um fator de dilatação local.

Conseqüentemente, temos

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = \mu(x_1, x_2) \cos \theta(x_1, x_2), \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = \mu(x_1, x_2) \text{sen} \theta(x_1, x_2). \quad (9.6)$$

A transformação (9.3) pode ser considerada como um produto direto do grupo de dilatação D e um grupo de rotação bidimensional O_2 , cujos parâmetros μ e θ são funções de x_1 e x_2 , isto é, um grupo $D \times O_2$ local.

Definimos campos irredutíveis sob a transformação $D \times O_2$ como

$$\Psi'_{d,J}(x'_1, x'_2) = \mu^{-d}(x_1, x_2) \exp(-iJ\theta(x_1, x_2)) \Psi_{d,J}(x_1, x_2). \quad (9.7)$$

Observemos que podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_1}{\partial z} + \frac{\partial x'_1}{\partial \bar{z}} &= \mu(x_1, x_2) \cos \theta(x_1, x_2), & i \left(\frac{\partial x'_2}{\partial z} - \frac{\partial x'_2}{\partial \bar{z}} \right) &= \mu(x_1, x_2) \cos \theta(x_1, x_2), \\ \frac{\partial x'_2}{\partial z} + \frac{\partial x'_2}{\partial \bar{z}} &= -\mu(x_1, x_2) \operatorname{sen} \theta(x_1, x_2), & i \left(\frac{\partial x'_1}{\partial z} - \frac{\partial x'_1}{\partial \bar{z}} \right) &= \mu(x_1, x_2) \operatorname{sen} \theta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Usando as eqs.(9.8) e introduzindo $z' = x'_1 + ix'_2$, $\bar{z}' = x'_1 - ix'_2$, conseguimos

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\mu(x_1, x_2)}{2} \exp(-i\theta(x_1, x_2)), \quad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} = \frac{\mu(x_1, x_2)}{2} \exp(i\theta(x_1, x_2)). \quad (9.9)$$

Portanto a eq.(9.7) pode ser reescrita como

$$\Psi'_{d,J}(x'_1, x'_2) = 2^{-d} \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-\frac{1}{2}(d-J)} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-\frac{1}{2}(d+J)} \Psi_{d,J}(x_1, x_2), \quad (9.10)$$

onde d é um número complexo e $2J$ deve ser um inteiro.

Desprezando o fator 2^{-d} , considerando que $z' = F(z)$ e definindo $d = \delta + \bar{\delta}$, $J = \bar{\delta} - \delta$, podemos escrever

$$\Psi'_{\delta, \bar{\delta}}(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^{-\delta} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{\delta}} \Psi_{\delta, \bar{\delta}}(z, \bar{z}). \quad (9.11)$$

Uma vez que μ e θ correspondem a dilatações locais e parâmetros de rotações locais, d é a dimensão e J é o spin conforme da quantidade considerada; δ e $\bar{\delta}$ são chamados de pesos conformes.

É oportuno ressaltarmos que embora tenhamos inicialmente considerado z e \bar{z} como conjugados complexos, na eq.(9.11) z e \bar{z} não são mais necessariamente conjugados um do outro.

Suponhamos agora que $\Psi_{\delta,\bar{\delta}}(z, \bar{z})$ só dependa de z . Então a eq.(9.11) pode ser escrita

$$\Psi'_{\delta}(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-\delta} \Psi_{\delta}(z). \quad (9.12)$$

Consideremos uma transformação infinitesimal

$$\begin{cases} z \rightarrow z' = z(1 + \epsilon z^{-n}) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z} \end{cases}. \quad (9.13)$$

Então

$$\Psi'_{\delta}(z') = (1 + \epsilon(-n + 1)z^{-n})^{-\delta} \Psi_{\delta}(z) = (1 - \epsilon(-n + 1)\delta z^{-n}) \Psi_{\delta}(z). \quad (9.14)$$

Por outro lado, expandindo $\Psi'_{\delta}(z')$ em torno do ponto z até primeira ordem

$$\Psi'_{\delta}(z') = \Psi'_{\delta}(z + \epsilon z^{-n+1}) = \Psi'_{\delta}(z) + \epsilon z^{-n+1} \frac{\partial \Psi_{\delta}(z)}{\partial z}. \quad (9.15)$$

Comparando as eqs.(9.14) e (9.15)

$$\Psi'_{\delta}(z) - \Psi_{\delta}(z) = -\epsilon z^{-n} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + (-n + 1)\delta \right) \Psi_{\delta}(z) = -\epsilon [L_n, \Psi_{\delta}(z)]. \quad (9.16)$$

Na hipótese de que $\Psi_{\delta,\bar{\delta}}(z, \bar{z})$ só dependa de \bar{z} , então considerando a transformação

$$\begin{cases} \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z}(1 + \bar{\epsilon} \bar{z}^{-n}) \\ z \rightarrow z \end{cases}, \quad (9.17)$$

conseguimos

$$\Psi'_{\bar{\delta}}(\bar{z}) - \Psi_{\bar{\delta}}(\bar{z}) = -\bar{\epsilon} \bar{z}^{-n} \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (-n + 1)\bar{\delta} \right) \Psi_{\bar{\delta}}(\bar{z}) = -\bar{\epsilon} [\bar{L}_n, \Psi_{\bar{\delta}}(\bar{z})]. \quad (9.18)$$

L_n e \bar{L}_n são chamados de Geradores de Virasoro. As eqs.(9.16) e (9.18) resultam para um operador de campo O com pesos conformes δ e $\bar{\delta}$ em

$$[L_n, O] = z^{-n} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + (-n + 1)\delta \right) O, \quad (9.19)$$

$$[\bar{L}_n, O] = \bar{z}^{-n} \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (-n + 1)\bar{\delta} \right) O. \quad (9.20)$$

No espaço de operadores de campo de peso conforme nulo ($\delta = \bar{\delta} = 0$), as eqs.(9.19) e (9.20) sugerem

$$L_n = z^{-n+1} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{L}_n = \bar{z}^{-n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (9.21)$$

Consideremos agora

$$a_n = a_{-n}^+,$$

onde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, satisfazendo a relação

$$[a_n, a_m] = n \delta_{n,-m}.$$

Define-se, então

$$L_n = \frac{1}{2} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} a_{k+n} :, \quad (9.22)$$

onde $n \neq 0$ e $::$ significa ordenamento normal.

Temos também

$$L_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k + \frac{a_0^2}{2}, \quad (9.23)$$

sendo a_0 um número complexo.

Se considerarmos a forma clássica, simplesmente ignoramos o ordenamento normal e assim teremos

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n}. \quad (9.24)$$

Considerando-se a forma quântica, devemos levar em conta o ordenamento normal e nesse caso teremos

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}, \quad (9.25)$$

onde c é uma constante.

Seja o operador de vértice

$$V_\nu(z) = : \exp(i \sqrt{\nu} \varphi(z)) :, \quad (9.26)$$

onde $\varphi(z)$, conhecido como campo de Fubini-Veneziano, é dado por

$$\varphi(z) = q - ip \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n}. \quad (9.27)$$

Observemos que valem as seguintes relações de comutação

$$[q, p] = i, \quad (9.28)$$

$$[a_n, a_m] = n \delta_{n+m, 0}. \quad (9.29)$$

Na eq.(9.26), o símbolo $::$ denota ordenamento normal, ou seja, p é colocado à direita de q e a_n ($n > 0$) é colocado à direita de a_{-n} .

Primeiramente, notemos que através de um reordenamento, o produto de N operadores de vértice pode ser escrito (*Apêndice L*)

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^N V_\nu(z_\alpha) &= \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^\nu \exp \left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} \left(\sum_{\alpha=1}^N z_\alpha^n \right) \right) \times \\ &\times \exp(i\sqrt{\nu} Nq) \prod_{\alpha=1}^N z_\alpha^{\sqrt{\nu} p} \exp \left(-\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left(\sum_{\alpha=1}^N z_\alpha^{-n} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Isso tem como consequência imediata que os operadores de vértice são bons candidatos de serem os operadores aniônicos, uma vez que eles também satisfazem a seguinte relação

$$V_\nu(z_1) V_\nu(z_2) = V_\nu(z_2) V_\nu(z_1) \exp(\pm i \nu \pi), \quad (9.31)$$

onde os sinais \pm correspondem a duas maneiras topologicamente distintas de permutarmos z_1 e z_2 . Notemos que para ν par (ímpar) temos o caso bosônico (fermiônico) e para ν real temos o caso aniônico.

Além disso, o operador de vértice comporta-se como um operador que gera spins fracionários sob rotações (por exemplo, a primeira das eqs.(9.32) é verificada no *Apêndice M*)

$$[L_0, V_\nu(z)] = z \frac{dV_\nu(z)}{dz} + \frac{\nu}{2} V_\nu(z),$$

$$\exp(i L_0 \theta) V_\nu(z) \exp(-i L_0 \theta) = V_\nu(z \exp(i \theta)) \exp(i \frac{\nu}{2} \theta), \quad (9.32)$$

onde o gerador de rotação L_0 tem a forma

$$L_0 = \frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} a_n. \quad (9.33)$$

Observemos que para uma rotação de $\theta = 2\pi$, $V_\nu(z)$ transforma-se nele mesmo se ν é par (bóson), troca de sinal se ν é ímpar (férmion) e adquire uma fase $\exp(i\nu\pi)$ se ν é não inteiro (ânion).

Definamos o vácuo $|0\rangle$ por

$$p|0\rangle = 0, \quad a_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (9.34)$$

O vácuo dual $\langle 0|$ é definido por

$$\langle 0|q = 0, \quad \langle 0|a_{-n} = 0 \quad (n > 0). \quad (9.35)$$

Conseqüentemente, deprendemos da eq.(9.30) que

$$\langle 0| \prod_{\alpha=1}^N V_\nu(z_\alpha) |0\rangle = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^\nu, \quad (9.36)$$

a qual é precisamente a parte relevante da função de onda de Laughlin para ânions, o fator exponencial sendo considerado como um fator de medida.

Vamos nesse ponto verificar como as funções do tipo I (eq. 8.31)(considerando-se $n = 0$ e a exponencial como fator de medida) podem ser expressas usando a representação de operador de vértice (a derivação das funções de onda do tipo II (eq. 8.35) usando essa representação é conseguida de modo análogo).

No espaço de Fock dual do campo $\varphi(z)$, consideremos o estado no nível d_+ definido por

$$\langle \{\lambda_k\} | = \langle 0| \left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{a_2}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{a_k}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_k}, \quad (9.37)$$

onde $\{\lambda_k\}$ é um conjunto ordenado de inteiros não negativos tais que $\sum_k k\lambda_k = d_+$ (nesse caso, observemos que $\{0, 1\}$ tem que ser distinguido de $\{1, 0\}$).

Conseqüentemente, podemos escrever (Apêndice N)

$$\langle \{\lambda_k\} | \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) | 0 \rangle = B_{\{\lambda_k\}}^{(3)}(z_1, z_2, \dots, z_N) \prod_{\alpha < \beta} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{\nu}, \quad (9.38)$$

onde

$$B_{\{\lambda_k\}}^{(3)}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \left(\sum_{\alpha_1=1}^N z_{\alpha_1} \right)^{\lambda_1} \left(\sum_{\alpha_2=1}^N z_{\alpha_2}^2 \right)^{\lambda_2} \dots \left(\sum_{\alpha_k=1}^N z_{\alpha_k}^k \right)^{\lambda_k} \quad (9.39)$$

é o polinômio homogêneo simétrico de grau $d_+ = \sum_k k \lambda_k$.

$B_{\{\lambda_k\}}^{(3)}$ fornece uma terceira base (donde o número 3) para a expansão dos polinômios homogêneos simétricos de grau d_+ ; essa base é relacionada com as bases previamente mencionadas $B_{\{d_k\}}^{(1)}$ e $B_{\{d_k\}}^{(2)}$ (eq. 8.38 e 8.39) através de transformações lineares.

Dessa forma podemos representar todas as funções de onda do tipo I ($n = 0$) como uma combinação linear das funções dadas pela eq.(9.38). Portanto, a inserção dos osciladores a_k na função correlação (eq. 9.36) tem como resultado aumentar o momento angular do estado de Laughlin; o estado $\langle \{\lambda_k\} |$ é um estado de momento angular mais alto.

A parte relevante das funções de onda do tipo I para $n \geq 1$ pode ser representada utilizando o operador escada

$$R = \frac{-2}{qB} \sum_{\alpha=1}^N \left(\bar{\partial}_{\alpha} - \frac{qB}{2} z_{\alpha} \right) \left(\partial_{\alpha} - \frac{qB}{2} \bar{z}_{\alpha} \right), \quad (9.40)$$

o qual aumenta a energia sem afetar o momento angular.

Conseqüentemente, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} R^n \langle \{\lambda_k\} | \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) | 0 \rangle &= B_{\{\lambda_k\}}^{(3)}(z_1, z_2, \dots, z_N) \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{\nu} L_n^{d_+ + \frac{\nu}{2} N(N-1) + N-1} \left(\frac{qB}{2} \sum_{\alpha=1}^N |z_{\alpha}|^2 \right). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Capítulo 10

Expansão das funções de onda de Laughlin em termos das funções de onda de Slater

O *ansatz* proposto por Laughlin (funções de onda) forma a base do nosso entendimento teórico do efeito Hall quântico.

No limite de baixa temperatura e forte campo magnético, os estados de partícula única são restritos ao nível mais baixo de Landau. Na falta de interações, esse nível de Landau possui uma alta degenerescência.

O efeito Hall quântico inteiro pode ser entendido em termos de níveis de Landau completamente preenchidos, enquanto que o efeito Hall quântico fracionário envolve níveis de Landau preenchidos de modo fracionário.

A função de Laughlin (*ansatz*) não normalizada é

$$\Psi^m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{2m+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2\right), \quad (10.1)$$

onde m é inteiro.

Essa função corresponde a estados que possuem preenchimento fracionário dado por $1/(2m + 1)$ no nível mais baixo de Landau. Temos assumido que $\sqrt{2} l$ corresponde a unidade de comprimento, ou seja, $\sqrt{2} l = 1$ onde l (comprimento magnético) é igual a

$$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}} = \sqrt{\frac{1}{qB}}, \quad (10.2)$$

onde, por simplicidade, consideramos $\hbar c = 1$.

Vamos discutir a forma quantizada das funções de Laughlin de preenchimento fracionário no espaço de Fock.

Na prática, isso significa expandir as funções de onda de Laughlin em termos das funções de onda de Slater. Uma vez que a função de onda de Laughlin tem momento angular fixo

$$J_{\text{Laughlin}} = (2m + 1) \frac{1}{2} N(N - 1), \quad (10.3)$$

ela pode ser expandida como uma combinação linear de funções de onda de Slater cada uma possuindo esse mesmo momento angular.

Para considerarmos sistemas contendo um número muito grande de partículas, torna-se mais conveniente utilizarmos a formulação segundo quantizada da mecânica quântica não relativística. Em segunda quantização, define-se um operador campo $\Phi(z)$ através da expansão

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(z), \quad (10.4)$$

onde os $\phi_k(z)$ formam um conjunto completo ortonormal de funções de onda de partícula única e os a_k são os operadores aniquilação grassmanianos que satisfazem a relação de anticomutação

$$\{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl}. \quad (10.5)$$

O vácuo de Fock $|0\rangle$ é definido como o estado aniquilado por todos os operadores a_k e um estado de N partículas $|[\lambda]\rangle$ é definido pela ação de N operadores criação sobre o vácuo

$$|[\lambda]\rangle = |[\lambda_1, \dots, \lambda_N]\rangle = a_{\lambda_1}^+ \dots a_{\lambda_N}^+ |0\rangle. \quad (10.6)$$

A função de onda primeiro quantizada de N partículas correspondente a esse estado é (Apêndice O)

$$\begin{aligned} \Psi^{[\lambda]}(z_1, \dots, z_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \Phi(z_N) \dots \Phi(z_1) | [\lambda] \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{\lambda_1}(z_1) & \phi_{\lambda_2}(z_1) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_1) \\ \phi_{\lambda_1}(z_2) & \phi_{\lambda_2}(z_2) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{\lambda_1}(z_N) & \phi_{\lambda_2}(z_N) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_N) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Esse é o conhecido determinante de Slater para o estado fermiônico de N partículas em que os estados de partícula única $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são ocupados. Em virtude das eqs.(10.5),(10.6), esses estados são ortonormais, ou seja

$$\langle [\lambda] | [\mu] \rangle = \delta_{[\lambda],[\mu]}. \quad (10.8)$$

Um estado geral é uma combinação linear dos estados de Fock, ou seja $|[\lambda]\rangle$

$$|\text{estado}\rangle = \sum_{[\lambda]} c_{[\lambda]} |[\lambda]\rangle. \quad (10.9)$$

Uma vez que as funções de onda de Laughlin primeiro quantizadas são importantes no estudo do efeito Hall quântico, torna-se natural indagarmos sobre sua forma segundo quantizada. Portanto, precisamos determinar os coeficientes da expansão $c_{[\lambda]}$ para o estado de Laughlin $|L\rangle$

$$|L\rangle = \sum_{[\lambda]} c_{[\lambda]} |[\lambda]\rangle. \quad (10.10)$$

A correspondente função de onda primeiro quantizada é dada pela eq.(10.7); assim os $c_{[\lambda]}$ são determinados pela decomposição da função de Laughlin (eq.(10.1)) em termos das funções base de Slater.

As funções de onda de partícula única relevantes são àquelas correspondentes ao nível mais baixo de Landau

$$\phi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi k!}} z^k \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right), \quad (10.11)$$

onde $k = 0, 1, \dots$ é um rótulo do momento angular e temos usado o fato de que $\sqrt{2}l = 1$, onde l é o comprimento magnético.

Usando-se essas funções de partícula única, as funções de Slater normalizadas (eq.(10.7)) tornam-se

$$\Psi_{\text{Slater}}^{[\lambda]}(z_1, \dots, z_N) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2\right)}{\sqrt{N! \pi^N \prod_{i=1}^N \lambda_i!}} \begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1} & z_1^{\lambda_2} & \dots & z_1^{\lambda_N} \\ z_2^{\lambda_1} & z_2^{\lambda_2} & \dots & z_2^{\lambda_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^{\lambda_1} & z_N^{\lambda_2} & \dots & z_N^{\lambda_N} \end{vmatrix}. \quad (10.12)$$

Podemos fazer duas simplificações para essas funções de onda.

Primeiro, vamos rotular a função de onda não mais pela cadeia de inteiros $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$, mas pela cadeia $\{\mu\} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ onde

$$\lambda_i = \mu_i + N - i. \quad (10.13)$$

Isso significa apenas que estaremos usando um rótulo relativo aos rótulos da função de onda de momento angular mínimo que tem $[\lambda] = [N - 1, N - 2, \dots, 2, 1, 0]$ e momento angular $J = \frac{1}{2}N(N - 1)$.

Portanto, a cadeia de inteiros $[\lambda]$ caracteriza o momento angular dos estados de partícula única ocupados, enquanto que a cadeia de inteiros $\{\mu\}$ caracteriza estados relativos ao estado $[\lambda] = [N - 1, N - 2, \dots, 2, 1, 0]$.

A segunda simplificação surge porque é natural considerarmos o fator $\exp(-\frac{1}{2}|z|^2)$ nas funções de onda representadas pela eq.(10.11) como parte da medida do espaço de Hilbert, em que as funções do nível mais baixo de Landau formam uma base no espaço de Hilbert-Bargman das funções analíticas.

Assim podemos escrever as funções de Slater simplificadas como

$$\Psi_{\text{Slater}}^{\{\mu\}}(z_1, \dots, z_N) = \begin{vmatrix} z_1^{\mu_1+N-1} & z_1^{\mu_2+N-2} & \dots & z_1^{\mu_N} \\ z_2^{\mu_1+N-1} & z_2^{\mu_2+N-2} & \dots & z_2^{\mu_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^{\mu_1+N-1} & z_N^{\mu_2+N-2} & \dots & z_N^{\mu_N} \end{vmatrix}. \quad (10.14)$$

Os fatores de normalização na eq.(10.12) não são relevantes para o problema da decomposição. Nessa notação, a função de onda de Laughlin (não normalizada) é

$$\Psi_L(z_1, \dots, z_N) = \left(\prod_{i < j} (z_i - z_j) \right)^{2m+1}, \quad (10.15)$$

onde m é um inteiro.

O problema a ser considerado é o da expansão de Ψ_L em termos dos determinantes

$$\Psi_{\text{Slater}}^{\{\mu\}}$$

Desde que a função de onda de Laughlin tem momento angular definido

$$J_L = (2m + 1) \frac{1}{2} N(N - 1), \quad (10.16)$$

então a expansão de Ψ_L em termos de $\Psi_{\text{Slater}}^{\{\mu\}}$ envolverá somente funções de Slater tais que

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = mN(N - 1). \quad (10.17)$$

Logo, podemos considerar o rótulo $\{\mu\}$ como sendo uma partição de $mN(N - 1)$. O correspondente rótulo $[\lambda]$ relacionado a $\{\mu\}$ segundo a eq.(10.13) representa ao invés uma partição de $(2m + 1) \frac{1}{2} N(N - 1)$.

É instrutivo nós considerarmos alguns casos simples. Quando $N = 2$ e $m = 1$ (correspondente ao estado de Laughlin um terço preenchido)

$$\begin{aligned} \Psi_L(z_1, z_2) &= \left(\begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix} \right)^3 = \begin{vmatrix} z_1^3 & 1 \\ z_2^3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 \\ z_2^2 & z_2 \end{vmatrix} = \\ &= \Psi_{\text{Slater}}^{\{2\}}(z_1, z_2) - 3 \Psi_{\text{Slater}}^{\{1,1\}}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Quando $N = 2$ e $m = 2$ (correspondente ao estado de Laughlin um quinto preenchido)

$$\begin{aligned} \Psi_L(z_1, z_2) &= \left(\begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix} \right)^5 = \begin{vmatrix} z_1^5 & 1 \\ z_2^5 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} z_1^4 & z_1 \\ z_2^4 & z_2 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} z_1^3 & z_1^2 \\ z_2^3 & z_2^2 \end{vmatrix} = \\ &= \Psi_{\text{Slater}}^{\{4\}}(z_1, z_2) - 5 \Psi_{\text{Slater}}^{\{3,1\}}(z_1, z_2) + 10 \Psi_{\text{Slater}}^{\{2,2\}}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Quando $N = 3$ e $m = 1$

$$\begin{aligned} \Psi_L(z_1, z_2, z_3) &= \left(\begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^3 = \begin{vmatrix} z_1^6 & z_1^3 & 1 \\ z_2^6 & z_2^3 & 1 \\ z_3^6 & z_3^3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} z_1^6 & z_1^2 & z_1 \\ z_2^6 & z_2^2 & z_2 \\ z_3^6 & z_3^2 & z_3 \end{vmatrix} - \\ &- 3 \begin{vmatrix} z_1^5 & z_1^4 & 1 \\ z_2^5 & z_2^4 & 1 \\ z_3^5 & z_3^4 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} z_1^5 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^5 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^5 & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} z_1^4 & z_1^3 & z_1^2 \\ z_2^4 & z_2^3 & z_2^2 \\ z_3^4 & z_3^3 & z_3^2 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_{\text{Slater}}^{\{4,2\}}(z_1, z_2, z_3) - 3 \Psi_{\text{Slater}}^{\{4,1,1\}}(z_1, z_2, z_3) - 3 \Psi_{\text{Slater}}^{\{3,3\}}(z_1, z_2, z_3) + \\
&+ 6 \Psi_{\text{Slater}}^{\{3,2,1\}} - 15 \Psi_{\text{Slater}}^{\{2,2,2\}}(z_1, z_2, z_3). \tag{10.20}
\end{aligned}$$

Para $N = 2$, é trivial decompormos Ψ_L em determinantes de Slater, mas quando $N = 3$ até mesmo para $m = 1$ não é simples determinarmos a decomposição. É evidente que para considerarmos um número maior de partículas e valores maiores de m , torna-se necessário obtermos um método sistemático. Precisamos, então, obter uma expressão para os coeficientes $a_{\{\mu\}}$ que aparecem na expansão

$$\Psi_L = \sum_{\{\mu\}} a_{\{\mu\}} \Psi_{\text{Slater}}^{\{\mu\}}. \tag{10.21}$$

Foi observado que as funções de Slater (eq.(10.14)) que aparecem na expansão (eq.(10.21)) são rotuladas pelas partições $\{\mu\}$ de $mN(N - 1)$. Cada uma dessas funções de Slater é um polinômio totalmente anti-simétrico de grau homogêneo dado por $(2m + 1)\frac{1}{2}N(N - 1)$. Cada função de Slater pode, portanto, ser escrita como o produto do determinante de Vandermonde V e um polinômio totalmente simétrico de grau homogêneo $mN(N - 1)$. Aqui V é dado por

$$V = \begin{vmatrix} z_1^{N-1} & z_1^{N-2} & \dots & 1 \\ z_2^{N-1} & z_2^{N-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^{N-1} & z_N^{N-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j). \tag{10.22}$$

O polinômio simétrico citado é conhecido como função de Schur ou função S . A função

S é escrita como

$$S^{\{\mu\}}(z_1, \dots, z_N) = \frac{\begin{vmatrix} z_1^{\mu_1+N-1} & z_1^{\mu_2+N-2} & \dots & z_1^{\mu_N} \\ z_2^{\mu_1+N-1} & z_2^{\mu_2+N-2} & \dots & z_2^{\mu_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^{\mu_1+N-1} & z_N^{\mu_2+N-2} & \dots & z_N^{\mu_N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{N-1} & z_1^{N-2} & \dots & 1 \\ z_2^{N-1} & z_2^{N-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^{N-1} & z_N^{N-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad (10.23)$$

As funções de Schur $S^{\{\mu\}}$ fornecem uma base linear para o espaço dos polinômios simétricos de grau homogêneo $\sum_{i=1}^N \mu_i$. A função de Laughlin (eq.(10.15)) será escrita como V^{2m+1} e portanto dividindo a expansão (eq.(10.21)) pelo determinante de Vandermonde V , resulta

$$\frac{\Psi_L}{V} = V^{2m} = \sum_{\{\mu\}} a_{\{\mu\}} S^{\{\mu\}}. \quad (10.24)$$

Em consequência, para determinarmos os coeficientes $a_{\{\mu\}}$ da expansão de $\Psi_L = V^{2m+1}$ em termos das funções de Slater $\Psi_{\text{Slater}}^{\{\mu\}}$ totalmente anti-simétricas, podemos equivalentemente considerar a expansão de V^{2m} em termos das funções de Schur $S^{\{\mu\}}$ totalmente simétricas. Das eqs.(10.21),(10.24) notamos que os coeficientes da expansão estão em correspondência um a um.

Outra base conveniente para o espaço dos polinômios totalmente simétricos de grau homogêneo $mN(N-1)$ é a base soma de potências. As somas de potências s_μ são definidas para $\mu = 1, \dots, \infty$ de acordo com a relação

$$s_\mu(z_1, \dots, z_N) = \sum_{i=1}^N z_i^\mu. \quad (10.25)$$

Qualquer polinômio totalmente simétrico pode ser expresso como uma soma de produtos dos s_μ 's e portanto uma base para os polinômios totalmente simétricos de grau homogêneo

$mN(N - 1)$ é fornecida pelos produtos

$$s_{\{\mu\}} = s_{\mu_1} s_{\mu_2} \cdots s_{\mu_N}, \quad (10.26)$$

onde $\sum_{i=1}^N \mu_i = mN(N - 1)$.

A transformação linear entre a base constituída das funções de Schur e a base soma de potências é dada pela fórmula da reciprocidade de Frobenius

$$s_{\{\mu\}} = \sum_{\{\lambda\}} \chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}} S_{\{\lambda\}}, \quad (10.27)$$

onde $\chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}}$ são os caracteres da representação $\{\lambda\}$ do grupo simétrico de $\sum_{i=1}^N \mu_i$ símbolos. No nosso caso de interesse, $\sum_{i=1}^N \mu_i = mN(N - 1)$ e assim o grupo simétrico relevante é o $S_{mN(N-1)}$.

É importante notarmos que os caracteres $\chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}}$ são inteiros. Além disso, esses caracteres satisfazem as seguintes relações de completude as quais permitem invertermos a fórmula de Frobenius (eq.(10.27)). Se a partição $\{\mu\}$ de $mN(N - 1)$ é rotulada com a notação de Frobenius (l_1, l_2, l_3, \dots) onde

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots = mN(N - 1), \quad (10.28)$$

então os caracteres $\chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}} = \chi_{(l)}^{\{\lambda\}}$ satisfazem

$$\frac{1}{(mN(N - 1))!} \sum_{(l)} g(l) \chi_{(l)}^{\{\lambda\}} \chi_{(l)}^{\{\lambda'\}} = \delta_{\{\lambda\}, \{\lambda'\}}, \quad (10.29)$$

$$\sum_{\{\lambda\}} \chi_{(l)}^{\{\lambda\}} \chi_{(l')}^{\{\lambda\}} = \frac{(mN(N - 1))!}{g(l)} \delta_{(l), (l')}, \quad (10.30)$$

onde

$$g(l) = \frac{(mN(N - 1))!}{1^{l_1} 2^{l_2} \dots l_1! l_2! \dots}. \quad (10.31)$$

Da fórmula de Frobenius (eq.(10.27)), é evidente que se conseguirmos expandir V^{2m} na base soma de potências, então será possível convertermos essa expansão para a base constituída

das funções de Schur. Essa é uma observação útil, pois é relativamente fácil expressarmos V^{2m} na base soma de potências, uma vez que V^2 pode ser expandido segundo

$$\begin{aligned}
 V^2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_N & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & s_1 & s_2 & \dots & s_{N-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_N \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1} & s_N & s_{N+1} & \dots & s_{2(N-1)} \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{\text{permutações } p} (-1)^p s_{p(1)-1} s_{p(2)} s_{p(3)+1} \dots s_{p(N)+N-2}, \tag{10.32}
 \end{aligned}$$

onde, na somatória, as permutações p são permutações sobre N letras e $s_0 = N$.

Portanto, a eq.(10.32) fornece uma simples decomposição de V^2 na base soma de potências

$$V^2 = \sum_{\text{permutações } p} (-1)^p s_{\{\mu_p\}}, \tag{10.33}$$

onde para cada permutação p , $\{\mu_p\}$ é a seguinte partição não ordenada de $N(N-1)$

$$\{\mu_p\} = \{p(1) - 1, p(2), p(3) + 1, \dots, p(N) + N - 2\}. \tag{10.34}$$

Notemos que V^{2m} pode analogamente ser expandido em termos da base soma de potências e conseqüentemente em termos da função de Schur através da fórmula de Frobenius (eq.(10.27)).

Doravante, concentraremos nossa atenção ao caso em que $m = 1$, o qual corresponde a função de onda de Laughlin de preenchimento fracionário igual a um terço.

Na definição (eq.(10.25)) da soma de potências, é assumido que $\mu \geq 1$ de forma que as partições na eq.(10.26) são partições em partes não nulas. Antes de aplicarmos a fórmula de Frobenius a eq.(10.33), é necessário separarmos a expansão de Laplace (eq.(10.32)) em permutações para as quais s_0 é um fator (isto é, aquelas permutações para as quais $p(1) = 1$) e em permutações para as quais s_0 não é um fator. A primeira corresponde a partições de

$N(N - 1)$ em exatamente $N - 1$ partes não nulas, enquanto que a segunda corresponde a partições de $N(N - 1)$ em exatamente N partes não nulas (isso significa uma drástica redução comparado a todas as possíveis partições de $N(N - 1)$).

Então, através da fórmula de Frobenius, encontra-se a seguinte expressão para os coeficientes da expansão $a_{\{\mu\}}$

$$a_{\{\mu\}} = N \sum_{\text{permutações } (p(1) = 1)} (-1)^p \chi_{\{\lambda_p\}}^{\{\mu\}} + \sum_{\text{permutações } (p(1) \neq 1)} (-1)^p \chi_{\{\lambda_p\}}^{\{\mu\}}. \quad (10.35)$$

A vantagem dessa fórmula reside no fato de que podemos calcular os coeficientes de qualquer função de Schur na expansão de V^2 sem contanto fazer qualquer referência ao próprio polinômio V^2 .

É também de interesse observarmos que embora a expressão (eq.(10.35)) para $a_{\{\mu\}}$ é uma grande soma de inteiros, os valores finais encontrados para os $a_{\{\mu\}}$ são inteiros simples.

Vamos agora, a título de esclarecermos melhor esses tópicos discutidos, discutir alguns exemplos.

Para $N = 2$

$$V^2 = \begin{vmatrix} 2 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 2s_2 - s_1^2 = 2s_{\{2\}} - s_{\{1,1\}}. \quad (10.36)$$

Seja agora a tabela

$\chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}}$	$\{1, 1\}$	$\{2\}$
$\{1, 1\}$	1	-1
$\{2\}$	1	1

Tabela 10.1: Tabela dos caracteres do grupo simétrico S_2 .

A fórmula de Frobenius (eq.(10.27)) diz que

$$\begin{aligned} s_{\{2\}} &= S_{\{2\}} - S_{\{1,1\}}, \\ s_{\{1,1\}} &= S_{\{1,1\}} + S_{\{2\}}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Isso pode ser facilmente verificado uma vez que as soma de potências e as funções de Schur para $N = 2$ são

$$\begin{aligned} s_{\{2\}} &= z_1^2 + z_2^2, \\ s_{\{1,1\}} &= (z_1 + z_2)^2, \end{aligned} \tag{10.38}$$

$$\begin{aligned} S_{\{2\}} &= \frac{\begin{vmatrix} z_1^3 & 1 \\ z_2^3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix}} = z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2, \\ S_{\{1,1\}} &= \frac{\begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 \\ z_2^2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix}} = z_1 z_2. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Inserindo essas expansões na eq.(10.36), resulta

$$V^2 = S_{\{2\}} - 3 S_{\{1,1\}}, \tag{10.40}$$

resultado que deve ser comparado com a expansão de Slater de V^3 (eq.(10.18)).

Para $N = 3$

$$\begin{aligned} V^2 &= \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = -s_2^3 + 2s_1 s_2 s_3 - 3s_3^2 - s_1^2 s_4 + 3s_2 s_4 = \\ &= -s_{\{2,2,2\}} + 2s_{\{3,2,1\}} - 3s_{\{3,3\}} - s_{\{4,1,1\}} + 3s_{\{4,2\}}. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Então da eq.(10.35), resulta

$$a_{\{\mu\}} = 3 \left(\chi_{\{4,2\}}^{\{\mu\}} - \chi_{\{3,3\}}^{\{\mu\}} \right) + 2 \chi_{\{3,2,1\}}^{\{\mu\}} - \chi_{\{2,2,2\}}^{\{\mu\}} - \chi_{\{4,1,1\}}^{\{\mu\}}. \tag{10.42}$$

Utilizando a tabela parcial dos caracteres do grupo simétrico S_6 , encontramos a seguinte expansão

$$V^2 = S_{\{4,2\}} - 3 S_{\{4,1,1\}} - 3 S_{\{3,3\}} + 6 S_{\{3,2,1\}} - 15 S_{\{2,2,2\}}, \quad (10.43)$$

resultado esse que também deve ser comparado com a expansão explícita de V^3 em determinantes de Slater (eq.(10.20)).

$\chi_{\{\mu\}}^{\{\lambda\}}$	$\{2, 2, 2\}$	$\{3, 2, 1\}$	$\{3, 3\}$	$\{4, 1, 1\}$	$\{4, 2\}$
$\{2, 2, 2\}$	3	-1	2	1	-1
$\{3, 2, 1\}$	1	1	-2	0	0
$\{3, 3\}$	-3	1	2	-1	-1
$\{4, 1, 1\}$	-2	-1	1	0	0
$\{4, 2\}$	3	0	0	-1	1

Tabela 10.2: Tabela parcial dos caracteres do grupo simétrico S_6 .

Conclusão

O estudo do problema de N ânions submetido a um campo magnético pode ser feito de duas maneiras equivalentes: ou consideramos a hamiltoniana de partícula livre e a interação estatística estando localizada nas funções de onda (denominadas funções *multi-valued*), ou trabalhamos com a interação estatística na hamiltoniana e assim teremos funções de onda *single-valued*.

Os osciladores com relações de comutação q -deformadas são conhecidos como osciladores- q . A construção fermiônica e bosônica padrão de Schwinger para $SU(2)_q$ tem sido generalizada para o oscilador- q resultando no grupo quântico $SU(2)_q$. Apesar das muitas analogias, deve-se ressaltar que em primeiro lugar, os osciladores- q podem ser definidos em qualquer dimensão enquanto que os ânions são essencialmente objetos bidimensionais e em segundo lugar, os osciladores- q são operadores locais enquanto que os ânions são não locais.

Verificou-se que os operadores J^\pm e J^0 , construídos através dos osciladores aniônicos por meio de uma construção de Schwinger generalizada, satisfazem a álgebra $SU(2)_q$ onde ρ parâmetro de deformação q é diretamente relacionado à estatística ν dos osciladores aniônicos segundo $q = \exp(i\nu\pi)$.

Sabe-se que a construção de Schwinger de $SU(2)$ pode ser facilmente generalizada para $SU(N)$ pelo uso de N conjuntos de osciladores em vez de apenas dois. Dessa forma, espera-se que a construção de $SU(2)_q$ possa ser estendida para $SU(N)_q$ sem dificuldades. Poderia ser interessante também estender a construção dos operadores aniônicos (não locais) para o espaço contínuo em vez da rede. Em tal caso, deveríamos substituir as somas discretas por integrais

definidas adequadamente.

Encontramos uma estrutura de grupo quântico no movimento bidimensional de um elétron em um campo magnético. Essa mesma estrutura de grupo quântico é encontrada quando analisamos o problema do potencial periódico e o problema do toro. A base da representação da álgebra quântica é composta das funções de onda do sistema. A simetria do grupo quântico comuta com a hamiltoniana e é de caráter relevante para caracterizar a degenerescência do nível de Landau. O parâmetro de deformação q da álgebra quântica é dado pelo fator de preenchimento $\nu = 1/m$ (m sendo um inteiro ímpar).

O operador de Vértice, o qual gera a transformação de Bäcklund das funções de onda de Laughlin, mostrou-se estar relacionado à teoria solitônica. Conseqüentemente, parece haver uma ligação entre os três tópicos da física, a saber: efeito Hall quântico, teoria solitônica e teoria das cordas.

Talvez, então, através da teoria solitônica, possamos descobrir ou detalhar propriedades do efeito Hall quântico que até o momento não foram consideradas.

Apêndice A

Seja o estado genérico dado por

$$\varphi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \Psi_n(\theta) \exp(-iE_n t), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\Psi_n(\theta) = \exp(in\theta), \quad (\text{A.2})$$

com n inteiro ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Logo,

$$\langle \varphi | \theta | \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \Psi_k^*(\theta) \exp(iE_k t) \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \Psi_n(\theta) \exp(-iE_n t) d\theta. \quad (\text{A.3})$$

Considerando-se que a hamiltoniana é dada por

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\theta^2},$$

então a eq.(A.3) pode ser reescrita como

$$\langle \varphi | \theta | \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{-2\pi i}{n-k} c_k^* c_n \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right). \quad (\text{A.4})$$

Conseqüentemente, temos

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi | \theta | \varphi \rangle = -\frac{\pi}{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq k=-\infty}^{\infty} (n+k) c_k^* c_n \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right). \quad (\text{A.5})$$

Considerando-se agora que

$$[H, \theta] = -\frac{1}{m} \frac{d}{d\theta},$$

temos

$$\begin{aligned}
 i \langle \varphi | [H, \theta] | \varphi \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{m} c_k^* c_n \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right) \int_0^{2\pi} \exp(i\theta(n - k)) d\theta = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{m} c_k^* c_n \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right) 2\pi \delta_{n,k} = \frac{\pi}{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2k c_k^* c_k. \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

Seja agora a equação

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi | \theta | \varphi \rangle = i \langle \varphi | [H, \theta] | \varphi \rangle + A, \quad (A.7)$$

onde A denota o termo anômalo.

Inserindo as eqs.(A.5) e (A.6) na eq.(A.7), resulta

$$A = -\frac{\pi}{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k^* c_n (n + k) \exp\left(\frac{-i(n^2 - k^2)t}{2m}\right). \quad (A.8)$$

Apêndice B

Seja o vetor potencial

$$\mathbf{A} = \frac{\phi}{2\pi r} \boldsymbol{\theta}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor unitário na direção do ângulo θ .

Seja também a equação que relaciona o vetor potencial com o campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{B.2})$$

É óbvio, então, que a direção do campo magnético associado ao vetor potencial \mathbf{A} é a do eixo x_3 . Procuremos desse modo verificar que o módulo de \mathbf{B} é realmente dado por $|\mathbf{B}| = \phi \delta(x_1) \delta(x_2)$.

Seja, então

$$|\mathbf{B}| = \left| \nabla \times \left(\frac{\phi}{2\pi r} \boldsymbol{\theta} \right) \right| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\phi}{2\pi r} \right) = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde $r \neq 0$.

Se $r = 0$, resulta

$$|\mathbf{B}| = \left| \nabla \times \left(\frac{\phi}{2\pi r} \boldsymbol{\theta} \right) \right| = C \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (\text{B.4})$$

onde temos que determinar a constante C .

Integrando a eq.(B.4), segue

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| \nabla \times \left(\frac{\phi}{2\pi r} \boldsymbol{\theta} \right) \right| d^2\mathbf{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| \nabla \times \left(\frac{\phi}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \boldsymbol{\theta} \right) \right| d^2\mathbf{x} = \\ &= \phi \lim_{a \rightarrow 0} a^2 \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{r^2 + a^2})^3} dr = \phi \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{a^2} = \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

o que resulta $|\mathbf{B}| = \phi \delta(x_1) \delta(x_2)$.

Apêndice C

Seja a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi = E \Psi. \quad (\text{C.1})$$

Escrevendo essa equação em coordenadas cilíndricas e supondo-se uma solução da forma $\Psi = R(r) \phi(\varphi) Z(z)$, temos

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + \frac{2m_e E}{\hbar^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (\text{C.2})$$

O membro esquerdo da eq.(C.2) é uma função de r e φ , enquanto o membro direito é uma função de z . Igualemos, então, o membro direito a uma constante (digamos λ^2). Obtemos assim

$$Z(z) = A_1 \exp(i\lambda z) + B_1 \exp(-i\lambda z). \quad (\text{C.3})$$

Impondo as condições de contorno, encontramos

$$Z(z) = C_\lambda \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{L} z \right). \quad (\text{C.4})$$

Igualando o membro esquerdo da eq.(C.2) a λ^2 , resulta

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{2m_e E}{\hbar^2} - \lambda^2 \right) r^2 = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2}. \quad (\text{C.5})$$

Igualemos o membro direito da eq.(C.5) a uma constante (digamos m^2). Obtemos dessa forma

$$\phi(\varphi) = A_2 \exp(im\varphi) + B_2 \exp(-im\varphi). \quad (\text{C.6})$$

Impondo as condições de contorno, encontraremos

$$\exp(im2\pi) = 1, \quad (C.7)$$

ou seja, concluímos que m deve ser inteiro.

Igualando o membro esquerdo da eq.(C.5) a m^2 e fazendo

$$\frac{2m_e E}{\hbar^2} - \lambda^2 = k^2, \quad (C.8)$$

resulta

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (C.9)$$

A eq.(C.9) é uma forma da equação diferencial de Bessel, cujas soluções envolvem séries de potências, denominadas funções de Bessel

$$R(r) = A_3 J_m(kr) + B_3 N_m(kr). \quad (C.10)$$

Impondo as condições de contorno, resulta

$$J_m(k_{mn}\rho_a) N_m(k_{mn}\rho_b) - J_m(K_{mn}\rho_b) N_m(k_{mn}\rho_a) = 0, \quad (C.11)$$

onde k_{mn} é a raiz enésima dessa equação.

Reescrevendo a eq.(C.8), temos

$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \right), \quad (C.12)$$

onde $l = 1, 2, \dots$ e $m = 0, 1, 2, \dots$

Apêndice D

Seja a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi = E \Psi. \quad (\text{D.1})$$

Escrevendo essa equação em coordenadas cilíndricas, levando-se em conta que

$$\frac{d}{d\varphi} \rightarrow \frac{d}{d\varphi} - \frac{iq}{\hbar} \frac{B\rho_a^2}{2}, \quad (\text{D.2})$$

e supondo-se uma solução da forma $\Psi = R(r) \phi(\varphi) Z(z)$, resulta

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \phi} \left(\frac{d}{d\varphi} - \frac{iq}{\hbar} \frac{B\rho_a^2}{2} \right)^2 \phi + \frac{2m_e E}{\hbar^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (\text{D.3})$$

Igualando o membro direito da eq.(D.3) a uma constante (digamos β^2), resulta

$$Z(z) = A_1 \exp(i\beta z) + B_1 \exp(-i\beta z). \quad (\text{D.4})$$

Impondo as condições de contorno, obtemos

$$Z(z) = C_\beta \text{sen} \left(\frac{l\pi}{L} z \right). \quad (\text{D.5})$$

Fazendo $qB\rho_a^2/2\hbar = a$ e igualando o membro esquerdo da eq.(D.3) a β^2 , resulta

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{2m_e E}{\hbar^2} - \beta^2 \right) r^2 = -\frac{1}{\phi} \left(\frac{d}{d\varphi} - ia \right)^2 \phi. \quad (\text{D.6})$$

Igualando o membro direito da eq.(D.6) a uma constante (digamos m^2), obtemos

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} - 2ia \frac{d\phi}{d\varphi} + (m^2 - a^2) \phi = 0. \quad (\text{D.7})$$

Supondo uma solução da forma

$$\phi(\varphi) = A(\varphi) \exp(ia\varphi), \quad (D.8)$$

obtemos

$$A(\varphi) = A_2 \exp(im\varphi) + B_2 \exp(-im\varphi), \quad (D.9)$$

e conseqüentemente podemos escrever

$$\phi(\varphi) = A_1 \exp(i(m+a)\varphi) + A_2 \exp(-i(m-a)\varphi). \quad (D.10)$$

Igualando o membro esquerdo da eq.(D.6) a m^2 e fazendo

$$k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2} - \beta^2, \quad (D.11)$$

conseguimos

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (D.12)$$

As soluções da eq.(D.12) são da forma

$$R(r) = A_3 J_m(kr) + B_3 N_m(kr). \quad (D.13)$$

Impondo as condições de contorno, resulta

$$J_m(k_{mn}\rho_a) N_m(k_{mn}\rho_b) - J_m(K_{mn}\rho_b) N_m(k_{mn}\rho_a) = 0, \quad (D.14)$$

onde k_{mn} é a raiz enézima dessa equação.

Reescrevendo a eq.(D.11), temos

$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \right). \quad (D.15)$$

Observemos que em todas essas considerações não apareceu uma imposição que restringisse m a assumir somente valores inteiros. Portanto, $l = 1, 2, \dots$ e m não mais necessariamente inteiro.

Apêndice E

Seja a eq.(8.24) escrita em termos das componentes

$$\begin{aligned}\dot{v}_{x_1} &= \omega v_{x_2}, \\ \dot{v}_{x_2} &= -\omega v_{x_1}, \\ \dot{v}_{x_3} &= 0,\end{aligned}\tag{E.1}$$

onde $\omega = qcB/E$.

Multipliquemos a segunda equação por i e adicionemos o produto à primeira

$$v_{x_1} + i v_{x_2} = C \exp(-i\omega t),\tag{E.2}$$

onde C é uma constante complexa. Pode-se escrevê-la sob a forma $C = v_0 \exp(-i\alpha)$, com v_0 e α reais. Logo

$$v_{x_1} + i v_{x_2} = v_0 \exp(-i(\omega t + \alpha)).\tag{E.3}$$

Comparando as partes real e imaginária

$$v_{x_1} = v_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad v_{x_2} = -v_0 \sin(\omega t + \alpha).\tag{E.4}$$

As constantes são determinadas a partir das condições iniciais; α é a fase inicial e v_0 pode ser escrita como

$$v_0 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2},\tag{E.5}$$

ou seja, v_0 é a velocidade da partícula no plano x_1x_2 , que se mantém constante durante o movimento.

Integrando uma vez as eqs. (E.4) e integrando duas vezes a equação $\dot{v}_{x_3} = 0$, encontramos as eqs.(3.5).

Apêndice F

Façamos a verificação da eq.(4.17) (utilizando os osciladores bosônicos deformados).

Vamos definir primeiramente

$$a_1^+ a_1 = \frac{q^{N_1} - q^{-N_1}}{q - q^{-1}}, \quad a_2^+ a_2 = \frac{q^{N_2} - q^{-N_2}}{q - q^{-1}}, \quad (\text{F.1})$$

$$a_1 a_1^+ = \frac{q^{N_1+1} - q^{-N_1-1}}{q - q^{-1}}, \quad a_2 a_2^+ = \frac{q^{N_2+1} - q^{-N_2-1}}{q - q^{-1}}. \quad (\text{F.2})$$

Essas definições são justificadas, pois

$$a_1 a_1^+ - q^{-1} a_1^+ a_1 = q^{N_1}, \quad (\text{F.3})$$

$$a_2 a_2^+ - q^{-1} a_2^+ a_2 = q^{N_2}. \quad (\text{F.4})$$

Conseqüentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} [J^+, J^-] &= [a_1^+ a_2, a_2^+ a_1] = a_1^+ a_1 a_2 a_2^+ - a_2^+ a_2 a_1 a_1^+ = \left(\frac{q^{N_1} - q^{-N_1}}{q - q^{-1}} \right) \left(\frac{q^{N_2+1} - q^{-N_2-1}}{q - q^{-1}} \right) - \\ &- \left(\frac{q^{N_2} - q^{-N_2}}{q - q^{-1}} \right) \left(\frac{q^{N_1+1} - q^{-N_1-1}}{q - q^{-1}} \right) = \frac{-q^{N_1-N_2-1} + q^{-N_2+N_1+1} - q^{-N_1+N_2+1} + q^{N_2-N_1-1}}{(q - q^{-1})^2} = \\ &= \frac{q^{(N_1-N_2)} - q^{-(N_1-N_2)}}{q - q^{-1}} = \frac{q^{2J^0} - q^{-2J^0}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Verifiquemos agora a eq.(4.42) (utilizando os osciladores fermiônicos).

Inicialmente notemos que podemos escrever

$$[J^+(z), J^-(w)] = \prod_{z_1 < z} q^{-2J^0(z_1)} 2 J^0(z) \prod_{z_2 > z} q^{2J^0(z_2)} \delta(z, w). \quad (\text{F.6})$$

Sabendo-se que

$$J^\pm = \sum_z J^\pm(z), \quad J^0 = \sum_z J^0(z), \quad (\text{F.7})$$

resulta

$$[J^+, J^-] = \sum_z \left(\prod_{z_1 < z} q^{-2J^0(z_1)} 2J^0(z) \prod_{z_2 > z} q^{2J^0(z_2)} \right). \quad (\text{F.8})$$

Verifiquemos agora que

$$\sum_z \left(\prod_{z_1 < z} q^{-2J^0(z_1)} 2J^0(z) \prod_{z_2 > z} q^{2J^0(z_2)} \right) = \frac{q^{2J^0} - q^{-2J^0}}{q - q^{-1}}. \quad (\text{F.9})$$

Utilizemo-nos do princípio da indução finita. Observemos de início que o operador $J^0(z)$ admite somente os autovalores 0 e $\pm 1/2$ para qualquer ponto z . Assim podemos escrever

$$2J^0(z) = \frac{q^{2J^0(z)} - q^{-2J^0(z)}}{q - q^{-1}}. \quad (\text{F.10})$$

Se a rede Ω tiver somente um ponto, digamos o ponto a , claramente $J^0 = J^0(a)$, e assim a eq.(F.9) vale em virtude da eq.(F.10).

Vamos agora assumir que a eq.(F.9) valha para uma rede Ω de N pontos e verifiquemos que ela permanece válida quando um ponto extra é adicionado, digamos b .

Supondo que $b > z_i$ (para $i = 1, \dots, N$), então a eq.(F.9) para uma rede com $N + 1$ pontos torna-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(\prod_{z_j < z_i} q^{-2J^0(z_j)} 2J^0(z_i) \prod_{z_k > z_i} q^{2J^0(z_k)} \right) q^{2J^0(b)} + q^{-2 \sum_{i=1}^N J^0(z_i)} 2J^0(b) = \\ & = \frac{1}{q - q^{-1}} \left(q^{2 \sum_{i=1}^N J^0(z_i)} q^{2J^0(b)} - q^{-2 \sum_{i=1}^N J^0(z_i)} q^{-2J^0(b)} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

onde $J^0 = \sum_{i=1}^N J^0(z_i)$.

Substituindo o termo em parênteses por $q^{2J^0} - q^{-2J^0} / q - q^{-1}$, resulta

$$q^{-2J^0} 2J^0(b) = \frac{q^{-2J^0}}{q - q^{-1}} \left(q^{2J^0(b)} - q^{-2J^0(b)} \right), \quad (\text{F.12})$$

a qual é válida devido a eq.(F.10).

O mesmo resultado pode ser obtido também quando $b < z_i$, completando nossa verificação .

Apêndice G

Nos cálculos que seguem estaremos considerando $q = \exp(a)$. Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \exp(-a \Delta_i(x)) c_i^+(y) &= (1 - a \Delta_i(x) + \dots) c_i^+(y) = c_i^+(y) - a (f(x, y) c_i^+(y) + c_i^+(y) \Delta_i(x)) + \dots \\ &= c_i^+(y) (1 - a f(x, y) - a \Delta_i(x) + \dots) = c_i^+(y) \exp(-a f(x, y)) \exp(-a \Delta_i(x)). \end{aligned} \quad (G.1)$$

Observemos de maneira análoga que

$$\begin{aligned} c_i(x) \exp(a \Delta_i(y)) &= c_i(x) (1 + a \Delta_i(y) + \dots) = c_i(x) + a (\Delta_i(y) c_i(x) + f(y, x) c_i(x)) + \dots = \\ &= (1 + a \Delta_i(y) + a f(y, x) + \dots) c_i(x) = \exp(a f(y, x)) \exp(a \Delta_i(y)) c_i(x). \end{aligned} \quad (G.2)$$

Da mesma forma podemos verificar que

$$\exp(-a \Delta_i(x)) \exp(a \Delta_i(y)) = \exp(a \Delta_i(y)) \exp(-a \Delta_i(x)). \quad (G.3)$$

Sejam as equações

$$\alpha_i(x) = q^{-\Delta_i(x)} c_i(x), \quad \alpha_i^+(y) = c_i^+(y) q^{\Delta_i(y)}. \quad (G.4)$$

Então, utilizando as eqs.(G.1),(G.2),(G.3), temos

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) \alpha_i^+(y) &= \exp(-a \Delta_i(x)) \delta(x, y) \exp(a \Delta_i(y)) - \exp(-a \Delta_i(x)) c_i^+(y) c_i(x) \exp(a \Delta_i(y)) = \\ &= \delta(x, y) - \exp(a f(y, x) - a f(x, y)) c_i^+(y) \exp(a \Delta_i(y)) \exp(-a \Delta_i(x)) c_i(x). \end{aligned} \quad (G.5)$$

Apêndice H

Seja um toro quadrado de comprimento L em unidades magnéticas. Trabalhando no gauge de Landau

$$\mathbf{A} = x_2 \mathbf{x}_1, \quad (\text{H.1})$$

os auto-estados da hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{i} \nabla + \mathbf{A} \right|^2 \quad (\text{H.2})$$

podem ser escritos na forma (considerando-se o primeiro nível de Landau)

$$\psi(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} x_2^2\right) f(z), \quad (\text{H.3})$$

onde $z = x_1 + i x_2$ e $f(z)$ é uma função analítica.

Uma vez que o vetor potencial expresso pela eq.(H.1) tem uma singularidade ao longo de $L = x_2$, as autofunções $\psi(x_1, x_2)$ são periódicas sob translação por L na direção x_2 somente considerando-se a transformação de gauge

$$\psi(x_1, x_2) \rightarrow \psi'(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) \exp(ix_1 x_2). \quad (\text{H.4})$$

Vamos, agora, analisar as condições de periodicidade de $f(z)$. A condição

$$\psi(x_1 + L, x_2) = \psi(x_1, x_2) \quad (\text{H.5})$$

implica que

$$f(z + L) = f(z). \quad (\text{H.6})$$

Por outro lado, a condição

$$\psi(x_1, x_2 + L) \exp(ix_1(x_2 + L)) = \psi(x_1, x_2) \exp(ix_1 x_2) \quad (\text{H.7})$$

resulta em

$$\exp\left(-\frac{1}{2} L^2\right) \exp(iLz) f(z + iL) = f(z). \quad (\text{H.8})$$

Notamos que a eq.(H.6) é satisfeita, caso f seja da forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{in2\pi}{L} z\right). \quad (\text{H.9})$$

A eq.(H.8), então, torna-se

$$\exp\left(-\frac{1}{2} L^2\right) \exp(iLz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{in2\pi}{L} (z + iL)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{in2\pi}{L} z\right). \quad (\text{H.10})$$

Supondo-se que o fluxo total através da superfície do toro satisfaz

$$L^2 = 2\pi N_s, \quad (\text{H.11})$$

onde N_s é um inteiro, a eq.(H.10) pode ser reescrita

$$\exp\left(-\frac{1}{2} L^2\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(-n2\pi) \exp\left(i(n + N_s) \frac{2\pi z}{L}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{in2\pi}{L} z\right), \quad (\text{H.12})$$

a qual é satisfeita para todo z desde que

$$a_n \exp\left(-\frac{1}{2} L^2\right) \exp(-n2\pi) = a_{n+N_s}. \quad (\text{H.13})$$

Essa última relação é satisfeita se a_n toma a forma

$$a_n = \exp\left(-\frac{2\pi^2}{L^2} n^2\right). \quad (\text{H.14})$$

Desde que a_n não está relacionado a a_{n+j} para $j = 1, \dots, N_s - 1$, existem evidentemente N_s soluções linearmente independentes para a eq.(H.10). Elas podem ser escritas como

$$f_l(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{L^2}{2} \left(m + \frac{l}{N_s}\right)^2\right) \exp\left(iL \left(m + \frac{l}{N_s}\right) z\right). \quad (\text{H.15})$$

Apêndice I

Consideremos o problema de encontrar as funções de onda de um elétron em um campo magnético uniforme em estados no qual ele tem valores definidos do momento linear e do momento angular na direção do campo.

Estaremos considerando que a carga do elétron é $q = -|q|$, a massa do elétron será denotada por m e o seu momento angular por J .

Em coordenadas polares cilíndricas r, θ, x_3 (com o eixo x_3 na direção do campo), o vetor potencial tem componentes $A_\theta = \frac{1}{2} B r$, $A_{x_3} = A_r = 0$ e a equação de Schrödinger é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{i \hbar q B}{m c} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{r^2 q^2 B^2}{8 m c^2} \Psi = E \Psi \quad (\text{I.1})$$

Supondo-se uma solução da forma

$$\Psi(r, \theta, x_3) = R(r) \exp(i J \theta) \exp(i \frac{x_3}{\hbar} p_{x_3}), \quad (\text{I.2})$$

encontramos para a função radial a equação

$$\ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + \left(\frac{1}{\hbar^2} (2 m E - p_{x_3}^2) - \left(\frac{q B}{2 c \hbar} \right)^2 r^2 + \frac{q B}{\hbar c} J - \frac{J^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (\text{I.3})$$

Definindo uma nova variável independente, digamos

$$\xi = \left(\frac{q B}{2 \hbar c} \right) r^2,$$

podemos reescrever a eq.(I.3) como

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{J^2}{4 \xi} \right) R = 0, \quad (\text{I.4})$$

onde

$$\beta = \frac{(2mE - p_{x_3}^2)c}{2\hbar q B} + \frac{J}{2}.$$

Quando $\xi \rightarrow \infty$ a função solicitada comporta-se como $\exp(-\frac{\xi}{2})$ e quando $\xi \rightarrow 0$ ela comporta-se como $\xi^{\frac{|J|}{2}}$. Então procuramos uma solução na forma

$$R(\xi) = \exp(-\frac{\xi}{2}) \xi^{\frac{|J|}{2}} \omega(\xi), \quad (I.5)$$

sendo que $\omega(\xi)$ é a função hipergeométrica

$$\omega = F\left\{-\left(\beta - \frac{|J|}{2} - \frac{1}{2}\right), |J| + 1, \xi\right\}. \quad (I.6)$$

Se a função de onda é finita em todo lugar, a quantidade $\beta - \frac{|J|}{2} - \frac{1}{2}$ deve ser um inteiro não negativo n_r . Os níveis de energia são então dados pela fórmula

$$E = \frac{\hbar q B}{m c} \left(n_r + \frac{|J| - J + 1}{2} \right) + \frac{p_{x_3}^2}{2m}. \quad (I.7)$$

As funções de onda radiais não normalizadas correspondentes são (considerando-se $\hbar = c = 1$)

$$R(r) = \exp\left(-\frac{q B r^2}{4}\right) r^{|J|} L_n^{|J|} \left(\frac{q B r^2}{2}\right). \quad (I.8)$$

A função hipergeométrica é um polinômio de Laguerre generalizado.

Portanto a nossa função de onda será (considerando-se o caso em que há movimento apenas no plano, ou seja, $p_{x_3} = 0$)

$$\Psi = \exp\left(-\frac{q B r^2}{4}\right) r^{|J|} L_n^{|J|} \left(\frac{q B r^2}{2}\right) \exp(i J \theta). \quad (I.9)$$

Fazendo $J = k - l$, e notando que podemos escrever

$$\exp(i J \theta) = z^k (\bar{z})^l |z|^{-(k+l)}, \quad (I.10)$$

segue que finalmente podemos reescrever a eq.(I.9) como

$$\Psi = z^k (\bar{z})^l |z|^{(|k-l|-(k+l))} \exp\left(-\frac{q B |z|^2}{4}\right) L_n^{|k-l|} \left(\frac{q B |z|^2}{2}\right). \quad (I.11)$$

Apêndice J

O polinômio de Laguerre generalizado $L_n^j(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$x \ddot{f} + (j + 1 - x) \dot{f} + n f = 0. \quad (\text{J.1})$$

A fórmula de Rodriguez para L_n^j é

$$L_n^j(x) = \frac{1}{n!} \exp(x) x^{-j} \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x) x^{n+j}), \quad (\text{J.2})$$

onde L_n^j é um polinômio para $j \geq -n, n \in Z^+$. Alguns casos especiais são

$$L_0^j = 1, \quad L_1^j = j + 1 - x,$$

$$L_n^0 = L_n \text{ (polinômio de Laguerre ordinário)}, \quad L_n^{-n} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n. \quad (\text{J.3})$$

Eles formam um conjunto ortogonal para cada $j > -1$

$$\int_0^\infty \exp(-x) x^j L_n^j(x) L_m^j(x) dx = \Gamma(j + 1) \binom{n + j}{n} \delta_{n,m}. \quad (\text{J.4})$$

Uma expressão explícita para L_n^j é

$$L_n^j(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n + j}{n - j} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (\text{J.5})$$

Temos, também

$$L_n^{-j}(x) = (-x)^j \frac{(n - j)!}{n!} L_{n-j}^j(x) \text{ (quando } j \in Z_+),$$

$$\frac{dL_n^j}{dx} = -L_{n-1}^{j+1},$$

$$x \frac{dL_n^j}{dx} = n L_n^j - (n + j) L_{n-1}^j. \quad (\text{J.6})$$

Apêndice K

Seja o problema de autovalor

$$\hat{H} \hat{\Psi} = \left(E - \frac{N}{2} \omega \right) \hat{\Psi}, \quad (\text{K.1})$$

$$J \hat{\Psi} = j \hat{\Psi}, \quad (\text{K.2})$$

onde a hamiltoniana \hat{H} e as funções de onda $\hat{\Psi}$ são definidas por

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^N \left(-\frac{2}{m} \bar{\partial}_{\alpha} \partial_{\alpha} + \frac{qB}{m} \bar{z}_{\alpha} \bar{\partial}_{\alpha} \right), \quad (\text{K.3})$$

$$\hat{\Psi} = \exp \left(\frac{qB}{4} \sum_{\alpha=1}^N |z_{\alpha}|^2 \right) \Psi. \quad (\text{K.4})$$

Levando-se em conta que $\hat{\Psi}$ deve atender a 2 exigências físicas ($\hat{\Psi}$ deve se anular em pontos de sobreposição e $\hat{\Psi}$ deve ser *multi-valued*), tem-se que a forma mais geral de $\hat{\Psi}$ com essas propriedades é

$$\hat{\Psi}(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) = \prod_{\alpha < \beta} \left[z_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}} \bar{z}_{\alpha\beta}^{b_{\alpha\beta}} \right] \phi(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) + \text{simetrização}, \quad (\text{K.5})$$

onde $z_{\alpha\beta} = (z_{\alpha} - z_{\beta})$, simetrização significa simetrização (para $\nu \neq 0, 1$ resulta que a simetrização não produz uma função de onda bosônica como pode-se verificar desse exemplo: $z_{12}^{\nu} + z_{21}^{\nu} = (1 + \exp(i\pi\nu)z_{12}^{\nu})$ com relação à permutação dos índices α nas variáveis $z_{\alpha}, \bar{z}_{\alpha}$ e

$$a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} = \nu; \nu \in [0, 2),$$

$$a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \geq 0, \quad (\text{K.6})$$

para qualquer par $(\alpha\beta)$.

Na eq.(K.5), ϕ é uma função *single-valued* a qual pode sempre ser escolhida de tal forma que satisfaça as condições de regularidade e a não se anular em todos os pontos de coincidência (notemos que $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$ não são necessariamente positivos).

Vamos verificar agora que para $\nu \neq 0, 1$ ou todos os $b_{\alpha\beta}$ ou todos os $a_{\alpha\beta}$ anulam-se, se nós impusermos que $\hat{\Psi}$ seja uma autofunção da hamiltoniana \hat{H} .

O termo mais singular em $\hat{H} \hat{\Psi}$ vem do laplaciano $\sum_{\alpha} \partial_{\alpha} \bar{\partial}_{\alpha}$ e é dado por

$$-\frac{2}{m} \sum_{\alpha=1}^N \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{a_{\alpha\beta}}{z_{\alpha\beta}} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{b_{\alpha\gamma}}{\bar{z}_{\alpha\gamma}} \right] \prod_{\alpha < \beta} (z_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}} \bar{z}_{\alpha\beta}^{b_{\alpha\beta}}) \phi(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) + \text{simetrização},$$

onde para $\alpha > \beta$ define-se $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ e $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$.

Para satisfazer a eq.(K.1), esse termo deve cancelar-se. Vamos supor que o conjunto A de não inteiros $a_{\alpha\beta}$ não é vazio e chamemos a_{pq} um elemento de A tal que

$$a_{pq} \leq a_{\alpha\beta}, \quad \forall a_{\alpha\beta} \in A. \quad (\text{K.7})$$

Devido a eq.(K.7), a simetrização não pode produzir cancelamentos casuais e portanto a eq.(K.1) implica que

$$b_{p\alpha} = b_{q\beta} = 0; \quad \forall \alpha \neq p, \quad \forall \beta \neq q. \quad (\text{K.8})$$

Então da eq.(K.5), obtém-se que

$$a_{p\alpha} = \nu, \quad (\nu \in [0, 2)), \quad a_{q\beta} = \nu \quad (\nu \in [0, 2)). \quad (\text{K.9})$$

O argumento pode ser repetido até se provar que todos os $b_{\alpha\beta}$ anulam-se e que todos $a_{\alpha\beta} = \nu$ ($\nu \in [0, 2)$).

A condição de regularidade da função de onda em pontos coincidentes exclui a possibilidade de que algum $a_{\alpha\beta}$ pudesse ser igual a $\nu - 2, \nu - 4$ e assim por diante. Portanto, podemos escrever

$$\hat{\Psi}_I = \prod_{\alpha < \beta} z_{\alpha\beta}^{\nu} P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N), \quad (\text{K.10})$$

onde as eventuais potências extras oriundas de $a_{\alpha\beta} = \nu + 2, \nu + 4, \dots$ têm sido absorvidas em P e o mesmo tem sido feito com relação à simetrização ; portanto P é completamente simétrico sob permutação dos rótulos α das partículas. Se nós tivéssemos suposto que $b_{\alpha\beta}$ não é um inteiro, a verificação é análoga a feita inicialmente e $\hat{\Psi}$ seria

$$\hat{\Psi}_{II} = \prod_{\alpha < \beta} (\bar{z}_{\alpha\beta})^{2-\nu} P(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N), \quad (K.11)$$

onde uma vez mais a regularidade para $z_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ foi usada.

Apêndice L

Seja o operador de Vértice

$$V_\nu(z) = : \exp(i\sqrt{\nu}\varphi(z)) :, \quad (\text{L.1})$$

onde o campo $\varphi(z)$ é dado por

$$\varphi(z) = q - ip \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n}. \quad (\text{L.2})$$

O ordenamento normal em (L.1) representado por $::$ significa

$$V_\nu(z) = \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)), \quad (\text{L.3})$$

onde

$$Q_<(z) = i \sum_{n < 0} a_n \frac{z^{-n}}{n}, \quad Q_>(z) = i \sum_{n > 0} a_n \frac{z^{-n}}{n}. \quad (\text{L.4})$$

Observemos também que valem as seguintes relações

$$[q, p] = i, \quad [a_n, a_m] = n \delta_{n+m, 0}. \quad (\text{L.5})$$

O produto de 2 operadores de Vértice resulta

$$\begin{aligned} V_\nu(z_1) V_\nu(z_2) &= \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z_1)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z_1)) \times \\ &\times \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z_2)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_2) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z_2)). \end{aligned} \quad (\text{L.6})$$

Notemos que

$$\exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z_1)) \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z_2)) =$$

$$= \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1) + i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2) - \frac{1}{2}[\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1), \sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)]). \quad (\text{L.7})$$

Calculando o comutador que surgiu em (L.7), resulta

$$[\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1), \sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)] = -\nu \sum_{m>0} \sum_{n<0} [a_m, a_n] z_1^{-m} z_2^{-n} \frac{1}{mn} = \nu \sum_{m>0} \frac{1}{m} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^m. \quad (\text{L.8})$$

Seja a equação

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^m = -\ln\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right). \quad (|z_1| > |z_2|) \quad (\text{L.9})$$

Inserindo a eq.(L.9) na eq.(L.8), encontramos

$$[\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1), \sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)] = -\nu \ln\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right), \quad (\text{L.10})$$

e conseqüentemente podemos reescrever a eq.(L.7) como

$$\exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1)) \exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) = \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1) + i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{\nu}{2}}. \quad (\text{L.11})$$

De maneira análoga

$$\exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1)) = \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1) + i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{-\frac{\nu}{2}}. \quad (\text{L.12})$$

Das eqs.(L.11) e (L.12), deprendemos que

$$\exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1)) \exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) = \exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z_2)) \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z_1)) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{\nu}. \quad (\text{L.13})$$

Portanto, podemos escrever a eq.(L.6) na forma

$$\begin{aligned} V_{\nu}(z_1) V_{\nu}(z_2) &= (z_1 - z_2)^{\nu} \frac{1}{z_1^{\nu}} \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z_1^n \frac{1}{n}\right) \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z_2^n \frac{1}{n}\right) \exp(i\sqrt{\nu}q) \times \\ &\times \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_2) \exp\left(-\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_1^{-n} \frac{1}{n}\right) \exp\left(-\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_2^{-n} \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (\text{L.14})$$

Obsevemos também que

$$\exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) \exp(i\sqrt{\nu}q) = \exp\left(\sqrt{\nu}p \ln z_1 + i\sqrt{\nu}q + \frac{1}{2} \nu \ln z_1\right). \quad (\text{L.15})$$

De maneira análoga

$$\exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) = \exp\left(\sqrt{\nu}p \ln z_1 + i\sqrt{\nu}q - \frac{1}{2} \nu \ln z_1\right). \quad (\text{L.16})$$

Das eqs.(L.15) e (L.16), segue

$$\exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) \exp(i\sqrt{\nu}q) = \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z_1) z_1^\nu. \quad (\text{L.17})$$

Finalmente, podemos escrever a eq.(L.14) na forma

$$\begin{aligned} V_\nu(z_1) V_\nu(z_2) &= (z_1 - z_2)^\nu \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} (z_1^n + z_2^n)\right) \times \\ &\times \exp(2i\sqrt{\nu}q) z_1^{\sqrt{\nu}p} z_2^{\sqrt{\nu}p} \exp\left(-\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (z_1^{-n} + z_2^{-n})\right). \end{aligned} \quad (\text{L.18})$$

A generalização para N operadores de Vértice segue de modo natural.

Apêndice M

Façamos a verificação da equação

$$[L_0, V_\nu(z)] = z \frac{dV_\nu(z)}{dz} + \frac{\nu}{2} V_\nu(z). \tag{M.1}$$

Primeiramente, desenvolvamos o membro esquerdo da eq.(M.1) lembrando-se de que

$$V_\nu(z) = \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)), \tag{M.2}$$

$$L_0 = \frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \tag{M.3}$$

$$Q_<(z) = i \sum_{n<0} a_n \frac{z^{-n}}{n}, \quad Q_>(z) = i \sum_{n>0} a_n \frac{z^{-n}}{n}, \tag{M.4}$$

$$[q, p] = i, \quad [a_n, a_m] = n \delta_{n+m,0}. \tag{M.5}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} [L_0, V_\nu(z)] &= \left[\frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)) \right] = \\ &= \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \left[\frac{p^2}{2}, \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \right] \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)) + \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \times \\ &\times \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)) \right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \exp(i\sqrt{\nu}Q_<(z)) \right] \times \\ &\times \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp(i\sqrt{\nu}Q_>(z)) \end{aligned} \tag{M.6}$$

O cálculo desses termos resulta

$$\exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z)) \left[\frac{p^2}{2}, \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \right] \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z)) = \sqrt{\nu}pV_{\nu}(z) - \frac{\nu}{2} V_{\nu}(z), \quad (\text{M.7})$$

$$\begin{aligned} & \exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z)) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \times \\ & \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z)) \right] = \sqrt{\nu}V_{\nu}(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \end{aligned} \quad (\text{M.8})$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n, \exp(i\sqrt{\nu}Q_{<}(z)) \right] \times \\ & \times \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp(i\sqrt{\nu}Q_{>}(z)) = \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^n \right) V_{\nu}(z). \end{aligned} \quad (\text{M.9})$$

Conseqüentemente

$$[L_0, V_{\nu}(z)] = \sqrt{\nu}pV_{\nu}(z) - \frac{\nu}{2} V_{\nu}(z) + \sqrt{\nu}V_{\nu}(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^n \right) V_{\nu}(z). \quad (\text{M.10})$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} & z \frac{d}{dz} \left(\exp \left(-\sqrt{\nu} \sum_{n<0} a_n z^{-n} \frac{1}{n} \right) \exp(i\sqrt{\nu}q) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp \left(-\sqrt{\nu} \sum_{n>0} a_n z^{-n} \frac{1}{n} \right) \right) = \\ & = \sqrt{\nu} \left(\sum_{n<0} z^{-n} a_n \right) V_{\nu}(z) + \sqrt{\nu}V_{\nu}(z) \sum_{n>0} z^{-n} a_n + \sqrt{\nu} \exp \left(-\sqrt{\nu} \sum_{n<0} a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) \times \\ & \times \left(p \exp(i\sqrt{\nu}q) - \sqrt{\nu} \exp(i\sqrt{\nu}q) \right) \exp(\sqrt{\nu}p \ln z) \exp \left(-\sqrt{\nu} \sum_{n>0} a_n \frac{z^{-n}}{n} \right) = \\ & = \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n a_{-n} \right) V_{\nu}(z) + \sqrt{\nu}V_{\nu}(z) \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} a_n + \sqrt{\nu}pV_{\nu}(z) - \nu V_{\nu}(z). \end{aligned} \quad (\text{M.11})$$

Portanto, segue que

$$z \frac{dV_{\nu}(z)}{dz} + \frac{\nu}{2} V_{\nu}(z) = \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n a_{-n} \right) V_{\nu}(z) + \sqrt{\nu}V_{\nu}(z) \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} a_n + \sqrt{\nu}pV_{\nu}(z) - \frac{\nu}{2} V_{\nu}(z). \quad (\text{M.12})$$

A verificação da eq.(M.1) segue da comparação das eqs.(M.10) e (M.12).

Apêndice N

Verifiquemos que

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{a_2}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{a_k}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_k} \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) | 0 \rangle = \\ & = (z_1 + z_2 + \dots + z_N)^{\lambda_1} \langle 0 | \left(\frac{a_2}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{a_k}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_k} \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{N.1})$$

Repetindo o mesmo procedimento que será mostrado para derivar a eq.(N.1) e usando

$$\langle 0 | \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) | 0 \rangle = \prod_{\alpha < \beta} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{\nu}, \quad (\text{N.2})$$

nós, de fato, teremos feito a verificação da eq.(9.38).

Notemos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_1} \exp \left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n} \right) = \\ & = \exp \left(\sqrt{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n} \right) \left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_1} \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}). \end{aligned} \quad (\text{N.3})$$

Seja o comutador

$$\begin{aligned} & \left[a_1, \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}) \right] = \\ & = \sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}). \end{aligned} \quad (\text{N.4})$$

Conseqüentemente, inserindo a eq.(N.4) na eq.(N.3)

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}} \right)^{\lambda_1} \exp \left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n} \right) = \exp \left(\sqrt{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} a_1^{\lambda_1-1} \left\{ \sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}) + \right. \\ \left. + \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}) a_1 \right\}. \quad (\text{N.5})$$

Lembrando-se de que $a_n |0\rangle = 0 (n > 0)$

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n}\right) |0\rangle = \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n}\right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} a_1^{\lambda_1-1} \sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \exp(\sqrt{\nu} (z_1 + z_2 + \dots + z_n) a_{-1}) |0\rangle. \quad (\text{N.6})$$

Repetindo esse procedimento λ_1 vezes, resulta

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n}\right) |0\rangle = \\ = (z_1 + z_2 + \dots + z_N)^{\lambda_1} \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n}\right) |0\rangle. \quad (\text{N.7})$$

Observação :

É evidente que quando escrevemos por exemplo

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} \exp\left(\sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1^n + z_2^n + \dots + z_N^n) a_{-n}}{n}\right) |0\rangle,$$

estamos, na verdade, querendo dizer

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{\nu}}\right)^{\lambda_1} \prod_{\alpha=1}^N V_{\nu}(z_{\alpha}) |0\rangle.$$

Apêndice O

Façamos a verificação da equação

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \Phi(z_N) \dots \Phi(z_1) | [\lambda] \rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{\lambda_1}(z_1) & \phi_{\lambda_2}(z_1) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_1) \\ \phi_{\lambda_1}(z_2) & \phi_{\lambda_2}(z_2) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{\lambda_1}(z_N) & \phi_{\lambda_2}(z_N) & \dots & \phi_{\lambda_N}(z_N) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (O.1)$$

Verifiquemos para dois campos Φ . A generalização para N campos Φ é feita de maneira análoga. Assim

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{\lambda'_1} a_{\lambda'_2} a_{\lambda_1}^+ a_{\lambda_2}^+ | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\lambda'_1} (\delta_{\lambda'_2 \lambda_1} - a_{\lambda_1}^+ a_{\lambda'_2}) a_{\lambda_2}^+ | 0 \rangle = \delta_{\lambda'_2 \lambda_1} \langle 0 | (\delta_{\lambda'_1 \lambda_2} - a_{\lambda_2}^+ a_{\lambda'_1}) | 0 \rangle - \\ & - \langle 0 | (\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} - a_{\lambda_1}^+ a_{\lambda'_1}) (\delta_{\lambda'_2 \lambda_2} - a_{\lambda_2}^+ a_{\lambda'_2}) | 0 \rangle = \delta_{\lambda'_2 \lambda_1} \delta_{\lambda'_1 \lambda_2} - \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (O.2)$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(z_2) \Phi(z_1) | [\lambda] \rangle &= \sum_{\lambda'_1=1}^N \sum_{\lambda'_2=1}^N \phi_{\lambda'_1}(z_2) \phi_{\lambda'_2}(z_1) \langle 0 | a_{\lambda'_1} a_{\lambda'_2} a_{\lambda_1}^+ a_{\lambda_2}^+ | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\lambda'_1=1}^N \sum_{\lambda'_2=1}^N \phi_{\lambda'_1}(z_2) \phi_{\lambda'_2}(z_1) (\delta_{\lambda'_2 \lambda_1} \delta_{\lambda'_1 \lambda_2} - \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}) = \phi_{\lambda_2}(z_2) \phi_{\lambda_1}(z_1) - \phi_{\lambda_1}(z_2) \phi_{\lambda_2}(z_1). \end{aligned} \quad (O.3)$$

Referências

- [1] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1144; **49** (1982) 957; Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2103.
- [2] F. Wilczek, *Fractional statistics and anyon superconductivity* (World scientific, Singapore, 1990).
- [3] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395; *Phys. Rev. B* **37** (1983) 3383; S. M. Girvin and R. Prange, *The quantum Hall effect* (Springer, New York, 1990).
- [4] Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 111.
- [5] C. Chou, *Phys. Lett. A* **155** (1991) 245.
- [6] M. D. Johnson and G. S. Canright, *Phys. Rev. B* **41** (1990) 6870.
- [7] S. Fubini, *Mod. Phys. Lett. A* **6** (1991) 347.
- [8] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cim.* **37 B** (1977) 1.
- [9] A. Lerda, *Ánions: Quantum mechanics of particles with fractional statistics* (Springer-Verlag, Berlin, Germany 1992).
- [10] V. G. Drinfeld, *Sov. Math. Dokl.* **32** (1985) 254; **36** (1988) 212.
- [11] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63; **11** (1986) 247.
- [12] N. Yu. Reshetiklin, L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev, *Leningrad Math. J.* **1** (1990) 193.

- [13] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum mechanics*, 3 rd ed. (Pergamon, Oxford, 1977).
- [14] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley publishing company.
- [15] A. Lerda and S. Sciuto, *Nucl. Phys. B* 401 (1993) 613.
- [16] G. Cristofano, G. Maiella, R. Musto and F. Nicodemi, *Mod. Phys. Lett. A* 6 (1991) 1779; 2985.
- [17] M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe and C. Montonen, *J. Phys. A: Math. Gen.* 26 (1993) L 1117.
- [18] R. Caracciolo and M. A. R. Monteiro, *Phys. Lett. B* 308 (1993) 58.
- [19] H. T. Sato, *preprint OS-GE-40-93* (December 1993).
- [20] I. J. R. Aitchison and N. E. Mavromats, *Contemp. Phys.* 32 (1991) 219.
- [21] R. B. Laughlin, *Ann. Phys.* 191 (1989) 163.
- [22] S. R. B. Escobar, *monografia IFT* (1992).
- [23] A. Cappelli, G. V. Dunne, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, *Nucl. Phys. B* 398 (1993) 531.
- [24] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *Lecture at the XIII meeting of the Particles and Fields of the Brazilian Physics Society*, Caxambu, September 1992.
- [25] G. V. Dunne, A. Lerda, S. Sciuto, C. A. Trugenberger, *Nucl. Phys. B* 370 (1992) 601.
- [26] A. Cappelli, C. A. Trugenberger and G. R. Zemba, *Nucl. Phys. B* 396 (1993) 465.
- [27] D. H. Kobe, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1592.
- [28] M. Asorey, J. G. Esteve and A. F. Pacheco, *Phys. Rev. D* 27 (1983) 1852.

- [29] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, the Benjamin/Cummings (1985).
- [30] C. B. Thorn, *Nucl. Phys. B* 248 (1984) 551.
- [31] S. Fubini, *Int. J. Mod. Phys. A* 5 (1990) 3533.
- [32] L. Brink, T. H. Hansson, S. Konstein and M. A. Vasiliev, *preprint* USITP-92-14, Göteborg ITP-92-53 (January 1993).
- [33] H. Azuma and S. Iso, *preprint* UT-660 (November 1993).
- [34] G. V. Dunne, *Slater decomposition of Laughlin states*, (1993), to appear in *Int. J. Mod. Phys. B*.

